Geometria no Plano e no Espaço II (Matemática A – 11.º ano)

Programação Linear (História; Problemas)

Os primeiros conceitos da programação linear foram desenvolvidos entre 1947 e 1949, depois da II Guerra Mundial, por George DANTZIG para serem aplicados a programas militares, desde a área da logística até à estratégia. Foi também DANTZIG o primeiro a reconhecer que um programa de planeamento poderia ser expresso por um sistema de inequações lineares, assim como foi o primeiro a apresentar, na forma de uma expressão matemática explícita, um critério de selecção da melhor solução, que hoje chamamos função objectivo. Todo esse trabalho resultou num algoritmo chamado *simplex* que resolve de uma forma eficiente estes problemas.

A programação linear tem sido aplicada por diversas entidades e empresas a inúmeros problemas. Entre os primeiros estudos não militares a serem concluídos, destacam-se:

• A companhia americana de petróleos TEXACO utilizou a programação linear para obter as condições ideais de tratamento do crude bruto permitindo um acréscimo de 30% dos lucros.

• A multinacional de restauração McDonald's, estudou a optimização dos horários de trabalho em quatro estabelecimentos e conseguiu uma mais eficiente utilização da mão-de-obra, em grande parte a tempo parcial, e com maior grau de satisfação por parte dos trabalhadores.

• A programação linear é uma "ferramenta" matemática que permite encontrar a solução óptima para um certo tipo de problemas. A palavra *programação*, pressupõe o planeamento de actividades ou tarefas. O adjectivo *linear* refere-se à legitimidade da tradução das condições ou relações entre as variáveis do problema em inequações ou equações lineares.

Pode definir-se programação linear como um conjunto de operações matemáticas que são usadas para estudar a distribuição de recursos limitados referentes a tarefas que exigem a sua utilização simultânea, de uma forma óptima para um dado objectivo. Em qualquer problema de optimização pode representar-se o modelo matemático como uma zona escura cuja entrada (*Input*) é constituída pelas variáveis do problema que se quer optimizar, pelas relações que descrevem a dependência das variáveis na utilização dos recursos e pêlos recursos disponíveis. A saída (*output*) é a solução óptima (máxima ou mínima) da função objectivo.

Modelo "*input-output*"
Entrada
(*input*) ——> Modelo   Saída
Matemático —> (*output*)

Ao conceber um modelo linear para um problema devemos considerar as seguintes fases:

• Verificação, no contexto do problema, da legitimidade do uso de inequações ou equações lineares.
• Identificação das variáveis de decisão.
• Identificação da função objectivo.
• Identificação das restrições.
• Formulação matemática do problema.

Depois de se ter obtido a formulação matemática, é então possível resolver o problema de optimização. No método de programação linear é adequado o recurso à metodologia gráfica e à metodologia algébrica. Na maior parte dos problemas, é imprescindível o recurso ao computador, tal é a diversidade de variáveis e a quantidade de cálculo envolvidos.

$\boxed{\text{Problema 1}}$ [tirado de Infinito 11_A] Para angariar fundos para a Associação de Estudantes, os alunos conseguiram a oferta de 20 pares de chuteiras e 60 camisolas e decidiram fazer 2 tipos de lotes com elas:
Tipo A: um par de chuteiras e uma camisola;

Tipo B: um par de chuteiras e cinco camisolas.

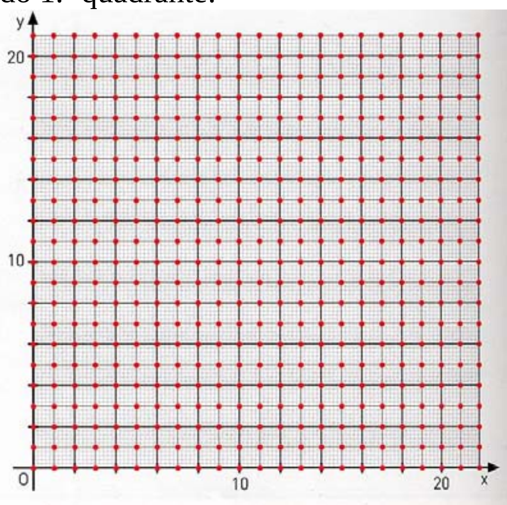
Venderiam, depois, os lotes do tipo A a € 20 e os do tipo B a € 100.
<u>Objectivo</u>: determinar o n.º de lotes de cada tipo a vender para obter o lucro máximo.

a) Qual é o lucro da Associação se venderem 10 lotes do tipo A e 4 do tipo B?

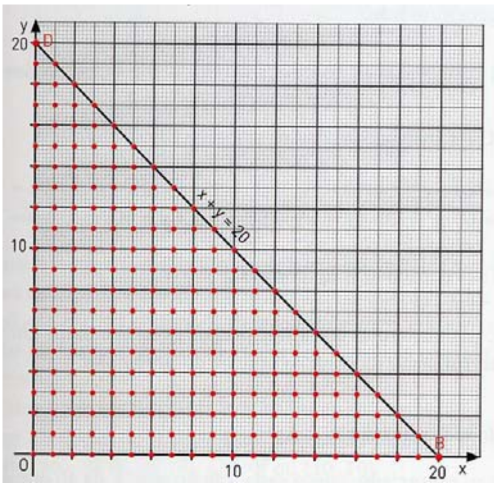
b) Preenche a seguinte tabela:

	N.º de lotes	N.º pares de chuteiras	N.º de camisolas	Lucro (L)
Tipo A	x			
Tipo B	y			
Total	$x + y$			

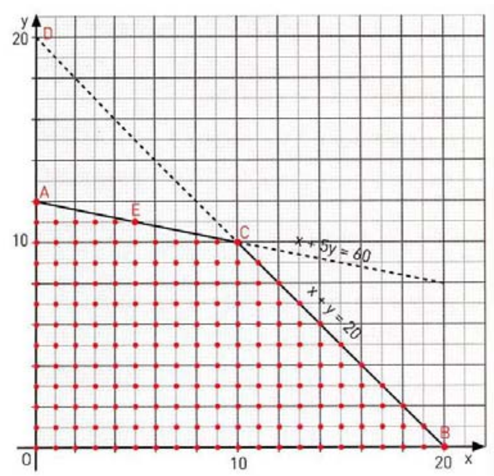
Este problema tem restrições.
1.ª) Por um lado, só tem lógica para x e y números naturais (e também o 0). Geometricamente, estas condições indicam que só nos interessam pontos do 1.º quadrante:



2.ª) O n.º de pares de chuteiras não pode ser superior a 20, isto é, $x + y \leq 20$ e, portanto,
$y \leq -x + 20$. Geometricamente, isto significa que, dos pontos escolhidos anteriormente, só nos interessam os pontos situados <u>sobre</u> ou <u>abaixo</u> da recta de equação $y = -x + 20$ (representa-se a recta escolhendo, por exemplo, os pontos D(0,20) e B(20,0))



3.ª) O n.º de camisolas não pode ser superior a 60, isto é, $x + 5y \leq 60$ e, portanto, $y \leq -\frac{1}{5}x + 12$. Geometricamente, isto significa que agora só nos interessam os pontos situados <u>sobre</u> ou <u>abaixo</u> da recta de equação $y = -\frac{1}{5}x + 12$ (representa-se a recta escolhendo, por exemplo, os pontos A(0,12) e E(5,11))



Portanto, todos os pontos que obedecem as estas restrições são <u>Pontos Admissíveis</u> (assinalados sobre o quadrilátero). O conjunto destes pontos é chamado de <u>Região de Validez</u> (só nesta região podemos encontrar a solução óptima).

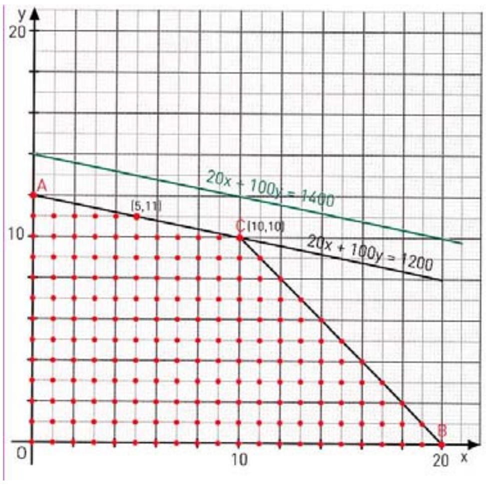
Qual é a <u>função lucro</u>?

Ela é expressa pela expressão $L = 20x + 100y$ (que é equivalente a $y = -\frac{1}{5}x + \frac{L}{100}$)
Assim, estamos perante uma família de rectas paralelas de declive igual a $-\frac{1}{5}$ e ordenada na origem $\frac{L}{100}$

Achar a solução óptima equivale a determinar a recta com maior ordenada na origem que intersecta o gráfico das soluções possíveis (pontos admissíveis do quadrilátero assinalado).

Tracemos, por exemplo, a recta de equação $20x + 100y = 1400$ e façamo-la deslocar-se, paralelamente a si própria para baixo (neste caso) até encontrar a região de validez.

Verificamos que isso acontece quando a recta tem a equação $20x + 100y = 1200$ (que, por acaso, é equivalente à recta anteriormente traçada de equação $x + 5y = 60$).



Portanto, é a recta de equação $10x + 50y = 600$ que está na região de validez a que tem maior ordenada na origem (logo, corresponde ao valor máximo do lucro).

Para o L máximo, temos assim os pontos (5,11), (10,10) e (0,12).

Conclusão: para termos a solução óptima para este problema:

» **ou se fazem 5 lotes do tipo A e 11 do tipo B**;

» **ou se fazem 10 lotes de cada tipo**;

» **ou se fazem 12 lotes só do tipo B.**

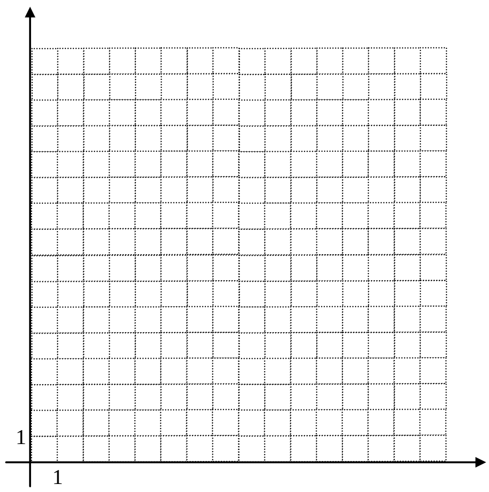
obtendo-se, sempre, € 1200 de lucro.

Problema 2 [tirado de Mat 11] Um grupo local possui duas emissoras de rádio, uma de FM e outra de AM. A emissora de FM emite diariamente 12 horas de música *rock*, 5 de música clássica e 6 de informação geral. A emissora de AM emite diariamente 6 horas de música *rock*, 8 de música clássica e 9 de informação geral. Cada dia de emissão de FM custa ao grupo € 2000 e cada dia de emissão de AM custa € 3000.

Sabendo que tem compactado para transmitir, 120 horas de música *rock*, 160 de música clássica e 135 de informação geral, quantos dias deverão emitir com este material cada uma das estações para que o **custo seja mínimo**, tendo em conta que deve emitir no mínimo 12 dias?

	Música *rock*	Música clássica	Informação	Custo Diário
Estação FM	12			
Estação AM				€3000
Disponibilidades				

Resolve este problema (começando pelas restrições ao problema). Não te esqueças que procuras o custo mínimo.



Mais problemas

Problema 3 Encomendaram-se a um pasteleiro dois tipos de bolos para uma festa de casamento. Cada quilograma de bolo do tipo A dá um lucro de 5 euros, e cada quilograma de bolo do tipo B dá um lucro de 7 euros. Relativamente aos produtos necessários à confecção dos bolos, o pasteleiro só tem limitações em dois: dispõe apenas de 10 Kg de açúcar e de 6 Kg de farinha. Sabe-se que:

- cada quilograma de bolo do tipo A leva 0,4 Kg de açúcar e 0,2 Kg de farinha;
- cada quilograma de bolo do tipo B leva 0,2 Kg de açúcar e 0,3 Kg de farinha.

a) O pasteleiro pensa fazer 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B. Será que é possível? Justifique a sua resposta.

b) Quantos quilogramas de bolo do tipo A e quantos quilogramas de bolo do tipo B deve o pasteleiro fabricar para ter o maior lucro possível?

[tirado de exemplos Gave]

Problema 4 O supermercado «Contente» está já a pensar em fazer dois tipos de cabazes para o próximo Natal. Assim, numa primeira fase, o supermercado vai dispor de 160 refrigerantes, 320 bebidas alcoólicas e 300 tipos de comida para fazer os seguintes cabazes:

Cabaz económico:
- contém 3 refrigerantes, 5 bebidas alcoólicas e 6 tipos de comida;
- será vendido por 40 euros.

Cabaz líquido:
- contém 4 refrigerantes, 10 bebidas alcoólicas e 6 tipos de comida;
- será vendido por 60 euros.

a) O subgerente sugeriu que se fizessem 22 cabazes de cada qualidade mas o gerente opinou que era melhor fazer 25 cabazes económicos e 20 cabazes líquidos. Averigúe se cada uma das propostas é viável, tendo em conta os produtos disponíveis.

b) Quantos cabazes de cada qualidade deverão ser vendidos para o supermercado «Contente» poder ter a receita máxima?

[tirado da sebenta Provas Modelo Matemática B]

Problema 5 Uma companhia de teatro necessita de comprar para o seu guarda-roupa, no mínimo, 15 lenços e 27 fitas de cabelo. No mercado encontram-se 2 tipos de caixas: as do tipo A que contêm 1 lenço e 5 fitas de cabelo e custam e € 10 e as do tipo B que contêm 5 lenços e uma fita de cabelo e custam € 30. Quantas caixas de cada tipo deve a companhia comprar para ter a despesa mínima e qual é essa despesa?

[tirado de Mat 11]

Soluções: 2. 8 e 4 3. Não por causa da farinha; 22,5 e 5; € 147,5 4. Nenhuma; 32 e 16 5. 5 e 2; € 110

O professor: RobertOliveira