Matemática, 12º Ano

Análise Combinatória e Probabilidades

Conceitos frequencista e clássico de probabilidades. Regra de Laplace. Lei dos grandes números.

Introdução histórica

A teoria matemática das probabilidades começou no século XVII, com os trabalhos de **Fermat** e de **Pascal**. O gradual interesse em problemas relacionados com probabilidades foi devido primeiramente ao desenvolvimento dos seguros, mas as questões específicas que estimularam os grandes matemáticos a pensar neste assunto vieram dos pedidos de nobres que se entregavam a jogos de acaso, tal como os dados e as cartas. De facto, foi um problema relacionado com os jogos de acaso que esteve na origem do cálculo das probabilidades. Mais precisamente, um nobre francês, o Cavaleiro de Méré, pôs um dia a Pascal um problema relacionado com um jogo de acaso. Pascal iniciou correspondência com Fermat sobre este problema e sobre questões com ele relacionadas e, a partir daí, ambos estabeleceram alguns dos fundamentos da teoria das probabilidades.

Mais tarde, no princípio do século XIX, **Laplace** escreve uma obra monumental, intitulada Teoria Analítica das Probabilidades. No prefácio dessa obra, Laplace diz o seguinte: *A teoria das probabilidades consiste na redução de todos os acontecimentos da mesma espécie a um certo número de casos igualmente prováveis, que são casos em que nós estamos igualmente indecisos sobre a sua existência, e na determinação do número de casos que são favoráveis ao acontecimento do qual procuramos a probabilidade*.

No século XX, graças sobretudo aos trabalhos de **Kolmogorov**, as probabilidades converteram-se numa teoria rigorosa com muitas aplicações. Para além de Kolmogorov, podemos destacar os trabalhos de **Fisher**, que deu um grande contributo para a chamada Inferência Estatística, que se baseia na teoria das probabilidades, e que está na origem, entre muitas outras coisas, das sondagens.

Conceitos frequencista e clássico de probabilidades. Regra de Laplace. Lei dos grandes números.

São frequentes frases como:

- A probabilidade de um certo medicamento resultar em determinada doença é de 95%
- A probabilidade de um certo basquetebolista converter um lance livre é de 70%
- A probabilidade de um certo atirador acertar num determinado alvo é de 60%

Qual o significado de frases como estas?

Tais frases significam que, ao fim de muitas experiências, se concluiu que:

- em aproximadamente 95% das vezes, o medicamento é eficaz;
- em aproximadamente 70% das vezes o basquetebolista converte os lances livres que marca;
- em aproximadamente 60% das vezes, o atirador acerta no alvo.

Note-se bem o seguinte: quando se diz, por exemplo, que em aproximadamente 60% das vezes, o atirador acerta no alvo, não se está a dizer que, de cada vez que ele dispara cem tiros, acerta exactamente sessenta. Umas vezes acerta mais, outras acerta menos. O que se está a dizer é que, em média, em cada cem tiros, ele acerta aproximadamente sessenta.

Ao interpretarmos a probabilidade de um acontecimento desta forma, estamos a utilizar o chamado **conceito frequencista de probabilidade**.

Quererá isto dizer que, para se saber a probabilidade de um acontecimento, temos de fazer sempre muitas experiências?
Não. Muitas vezes não é necessário fazer nenhuma experiência.
Como?
Vejamos um exemplo: quando atiramos uma moeda ao ar, não temos razão para admitir que uma das faces é mais provável do que a outra. Como dizia Laplace, *estamos igualmente indecisos* sobre qual das faces vai sair. É portanto natural atribuir a probabilidade $\frac{1}{2}$ (ou 50%) a qualquer uma das faces.
Do mesmo modo, quando lançamos um dado, não temos razão para admitir que existem faces mais prováveis do que outras. É portanto natural atribuir a probabilidade $\frac{1}{6}$ a qualquer uma das faces.

Assim, podemos muitas vezes descobrir a probabilidade de um acontecimento, contando os casos possíveis e contando os casos favoráveis.

Podemos, assim, dizer que:

A probablidade de um acontecimento é dada pelo quociente

$$\frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}$$

quando os casos possíveis são todos equiprováveis.

A regra que acabámos de enunciar chama-se **Regra de Laplace**.

O conceito de probabilidade que se baseia nesta regra é chamado **conceito clássico de probabilidade**.

Como relacionar os dois conceitos de probabilidade (o conceito frequencista e o clássico)?
A resposta a esta questão é dada pela chamada **Lei dos grandes números**, que se pode enunciar deste modo:

Quando se repete uma expriência muitas vezes, a frequência relativa com que determinado acontecimento se realiza aproxima-se da probabilidade desse acontecimento.

Por exemplo: se atirarmos um dado ao ar muitas vezes, a face 5 sairá aproximadamente $\frac{1}{6}$ das vezes. Além disso, quanto maior for o número de lançamentos, mais próximo de $\frac{1}{6}$ deverá ser a frequência relativa de saída da face 5.

Note-se, porém, que nem sempre faz sentido aplicar o conceito clássico de probabilidade. Por exemplo, quando se diz que a probabilidade de um certo medicamento resultar em determinada doença é de 95% estamos a utilizar exclusivamente o conceito frequencista. Estamos a dizer que, em média, em cada cem doentes, o medicamento é eficaz em noventa e cinco.
Se aplicássemos aqui o conceito clássico, teríamos de atribuir a probabilidade $\frac{1}{2}$. De facto, temos dois casos possíveis (o medicamento é eficaz; o medicamento não é eficaz) e um caso favorável (o medicamento é eficaz). O que acontece aqui é que não existem razões para admitir a equiprobabilidade dos casos possíveis. Mal estaríamos se acreditássemos que era tão provável um medicamento ser eficaz, como não ser.

Exercícios:

1. Um jogo educativo tem peças de madeira com quatro formas diferentes (um círculo, um triângulo, um rectângulo e um losango).
Cada forma apresenta-se em três cores (azul, branco e vermelho) e em dois tamanhos (grande e pequeno).

a) Quantas são as peças?

b) Tirando uma peça ao acaso, qual é a probabilidade de ser um círculo vermelho?

2. Uma turma tem vinte raparigas e doze rapazes. Sorteando dois alunos para representar a turma, qual é a probabilidade de que sejam do mesmo sexo?

3. Um baralho de cartas completo tem 52 cartas (13 cartas em cada naipe).

a) De quantas maneiras diferentes podemos dispor em fila as treze cartas do naipe de Espadas, de tal forma que as quatro cartas de honra (Ás, Rei, Dama e Valete) fiquem juntas, no princípio ou no fim da fila?

b) De um baralho completo, tiram-se oito cartas ao acaso.
Qual é a probabilidade de, nessas oito cartas, haver um Ás e pelo menos três Reis?

4. Considera o seguinte problema:
«Num certo país, vai surgir uma nova empresa de telecomunicações móveis. Os números da nova rede vão ser compostos por ***oito*** *algarismos. Os dois primeiros vão ser* ***97*** *e os restantes seis podem ser quaisquer (de 0 a 9), podendo haver repetição de algarismos.*
O número do primeiro cliente da empresa vai ser atribuído por sorteio.
Qual é a probabilidade de esse número ter, no conjunto dos seus oito algarismos, exactamente dois algarismos iguais a 9, exactamente três algarismos iguais a 7, e os restantes três algarismos serem todos diferentes?»

Uma solução correcta para este problema é $\dfrac{6 \times {}^5C_2 \times {}^8A_3}{10^6}$

Numa pequena composição, explica porquê.

- As questões 5 e seguintes, até à questão 19 inclusivé, são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.

5. A ementa de um restaurante tem dez sobremesas diferentes. Cinco clientes escolhem a sobremesa. A probabilidade de escolherem sobremesas distintas é

(A) $0,0023$ **(B)** $0,0254$ **(C)** $0,3024$ **(D)** $0,5142$

6. Uma turma de uma escola secundária tem nove rapazes e algumas raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, a probabilidade de ele ser um rapaz é $\frac{1}{3}$

Quantas raparigas tem a turma?

(A) 27 **(B)** 18 **(C)** 15 **(D)** 12

7. Colocaram-se numa urna doze bolas indistinguíveis pelo tacto, numeradas de 1 a 12.
Tirou-se uma bola da urna e verificou-se que o respectivo número era par.
Essa bola não foi reposta na urna.
Tirando, ao acaso, outra bola da urna, a probabilidade do número desta bola ser par é

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{5}{12}$ **(D)** $\frac{5}{11}$

8. Considere uma caixa de doze aguarelas, sendo uma da cada cor e também uma caixa de doze lápis de cera com as mesmas cores do que as referidas aguarelas.
Retirou-se, ao acaso, uma aguarela e um lápis de cera.
Qual a probabilidade de ter obtido uma aguarela e um lápis de cera da mesma cor?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{24}$ **(C)** $\frac{1}{12!}$ **(D)** $\frac{1}{24!}$

9. Uma certa linha do triângulo de Pascal é constituída por todos os números da forma $^{24}C_p$

Escolhendo ao acaso um número dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser 1 ?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{24}$ **(C)** $\frac{1}{25}$ **(D)** $\frac{2}{25}$

10. Uma empresa de cofres atribui ao acaso um código secreto a cada cofre que comercializa.
Cada código secreto é formado por quatro algarismos, por uma certa ordem.
Escolhendo-se um cofre ao acaso, qual é a probabilidade de o código ter exactamente três zeros?

(A) $0,0004$ **(B)** $0,0027$ **(C)** $0,0036$ **(D)** $0,004$

11. Cada uma de seis pessoas lança um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de os números saídos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6!}{6^6}$ **(B)** $\frac{1}{6^6}$ **(C)** $\frac{1}{6!}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

12. Lança-se quatro vezes consecutivas um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
No primeiro lançamento sai face 1 e no segundo sai face 2.

Qual é a probabilidade de os números saídos nos quatro lançamentos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6\times5\times4\times3}{6^4}$ **(B)** $\frac{6\times5}{6^4}$ **(C)** $\frac{6\times5}{6^2}$ **(D)** $\frac{4\times3}{6^2}$

13. A Sandra tem dez fichas de plástico, três das quais são verdes, sendo as restantes vermelhas. A Sandra empilha as dez fichas, aleatoriamente, umas em cima das outras.
Qual é a probabilidade de as três fichas verdes ficarem em cima?

(A) $\frac{{}^{10}C_3}{{}^{10}A_3}$ **(B)** $\frac{1}{{}^{10}A_3}$

(C) $\frac{3!}{10!}$ **(D)** $\frac{3!\times 7!}{10!}$

14. Um saco contém cinco cartões, numerados de 1 a 5.
A Joana retira sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões do saco e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos.
Qual é a probabilidade de esse número ser par e de ter o algarismo das dezenas também par?

(A) $\frac{{}^{5}C_2}{{}^{5}A_2}$ **(B)** $\frac{{}^{5}C_2}{5!}$ **(C)** $\frac{2\times 3!}{{}^{5}A_2}$ **(D)** $\frac{2\times 3!}{5!}$

15. Sete amigos vão ao futebol ver um desafio entre o clube Alfa e o clube Beta.
Três deles são adeptos do clube Alfa e quatro são adeptos do clube Beta.
No estádio sentam-se na mesma fila, uns ao lado dos outros, distribuidos ao acaso.
Qual é a probabilidade de os adeptos do clube Alfa ficarem todos juntos e os adeptos do clube Beta ficarem também todos juntos ?

(A) $\frac{3!\times 4!}{7!}$ **(B)** $\frac{2\times 3!\times 4!}{7!}$

(C) $\frac{2}{3!\times 4!}$ **(D)** $\frac{1}{3!\times 4!}$

16. Num saco estão quatro bolas de igual tamanho, numeradas de 1 a 4.
Tiram-se sucessivamente, sem reposição, as quatro bolas do saco.
Qual é a probabilidade de as bolas saírem por ordem crescente de numeração?

(A) $\frac{1}{24}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

17. Escolhem-se aleatoriamente dois vértices distintos de um cubo.
Qual é a probabilidade de o centro do cubo ser o ponto médio do segmento por eles definido?

(A) $\frac{1}{{}^{8}C_2}$ **(B)** $\frac{4}{{}^{8}C_2}$ **(C)** $\frac{1}{8!}$ **(D)** $\frac{4}{8!}$

18. Considere seis pontos distintos $(A, B, C, D, E$ e $F)$, pertencentes a uma circunferência.
Escolhidos três desses pontos ao acaso, qual é a probabilidade de eles definirem um triângulo que contenha o lado $[AB]$?

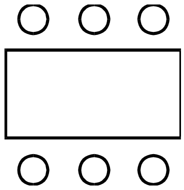
(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

19. O João tem num bolso do casaco uma moeda de 50$00, duas moedas de 100$00 e três moedas de 200$00.
Retirando duas moedas ao acaso, qual é a probabilidade de, com elas, perfazer a quantia exacta de 250$00?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

20.

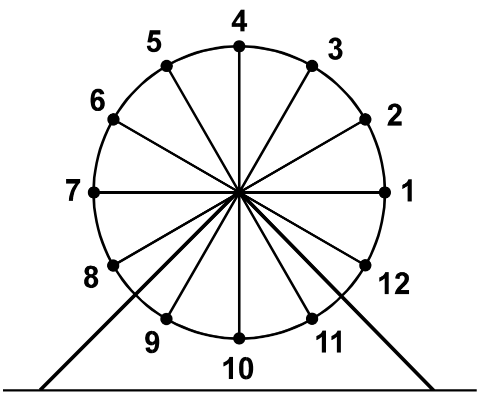
Seis amigos entram numa pastelaria para tomar café e sentam-se ao acaso numa mesa rectangular com três lugares de cada lado, como esquematizado na figura junta.
Determine a probabilidade de dois desses amigos, a Joana e o Rui, ficarem sentados em frente um do outro.



21. Um fiscal do Ministério das Finanças vai inspeccionar a contabilidade de sete empresas, das quais três são clubes de futebol profissional.
A sequência segundo a qual as sete inspecções vão ser feitas é aleatória.
Qual é a probabilidade de que as três primeiras empresas inspeccionadas sejam exactamente os três clubes de futebol?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

22. Uma roda gigante de um parque de diversões tem doze cadeiras, numeradas de 1 a 12, com um lugar cada uma (ver figura abaixo). Seis raparigas e seis rapazes, vão andar na roda gigante e sorteiam entre si os lugares que vão ocupar.

Qual é a probabilidade de rapazes e raparigas ficarem sentados alternadamente, isto é, cada rapaz entre duas raparigas e cada rapariga entre dois rapazes? Apresente o resultado na forma de percentagem.



23. O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0559.

a) Quantos códigos diferentes existem com um e só um algarismo zero?

b) Imagine que um amigo seu vai adquirir um cartão multibanco.
Admitindo que o código de qualquer cartão multibanco é atribuído ao acaso, qual é a probabilidade de o código desse cartão ter os quatro algarismos diferentes?
Apresente o resultado na forma de dízima.

24. Um saco contém sete bolas, numeradas de 1 a 7, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se sucessivamente, de forma aleatória, **duas** bolas do saco, repondo-se a primeira bola antes de se retirar a segunda.

Qual é a probabilidade de saírem dois números cuja soma seja igual a quatro?

Apresente o resultado na forma de fracção.

25. Lança-se três vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6.

Indique, justificando, qual dos dois acontecimentos seguintes é mais provável:

- *nunca sair o número 6;*
- *saírem números todos diferentes.*

26. O João e a irmã Alice querem telefonar a um amigo.

Ele lembra-se de que o número de telefone do amigo começa por 21 e tem mais sete algarismos: um 3, dois 5, dois 7, dois 8.

a) Quantos números existem nestas condições?

b) A Alice também se lembra de que o número de telefone do amigo termina em 857.
Se eles digitarem ao acaso os restantes quatro algarismos, qual é a probabilidade de acertarem à primeira tentativa? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

27. Seja B o conjunto dos números de quatro algarismos **diferentes**, menores que 3000, que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

a) Verifique que o conjunto B tem 240 elementos.

b) Escolhe-se, ao acaso, um elemento de B.
Qual é a probabilidade de que esse elemento seja um número par? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

c) Escolhem-se, ao acaso, três elementos de B.
Qual é a probabilidade de todos eles serem maiores do que 2000? Apresente o resultado na forma de dízima, com duas casas decimais.

28. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados dez jogadores: dois guarda-redes, quatro defesas e quatro avançados.

a) Sabendo que o treinador da selecção nacional opta por que Portugal jogue sempre com um guarda-redes, dois defesas e dois avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

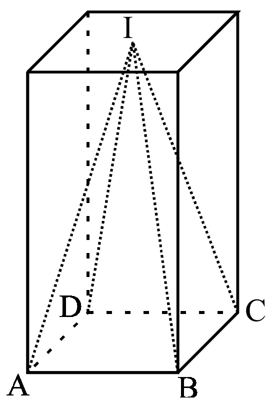
b) Um patrocinador da selecção nacional oferece uma viagem a cinco dos dez jogadores seleccionados, escolhidos ao acaso.
Qual é a probabilidade de os dois guarda-redes serem contemplados com essa viagem? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

29. Uma embalagem contém doze pastilhas com igual aspecto exterior, sendo três de ananás, três de cereja, três de laranja e três de morango.
Esvaziando a embalagem após a compra e retirando quatro pastilhas ao acaso, qual é a probabilidade de retirar uma de cada sabor?

30. Trinta soldados participam num exercício. A Marina Santos é um dos trinta soldados.
É necessário escolher três dos trinta soldados para ficarem de sentinela durante a noite.
Admitindo que a escolha é feita ao acaso, qual é a probabilidade de a Marina Santos ficar de sentinela?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

31. Para inaugurar uma ponte em Cegonhas de Baixo, a respectiva Junta de Freguesia vai organizar uma feijoada.
O principal clube desportivo da região, o Cegonhas Futebol Clube, foi convidado a fazer-se representar no almoço por três quaisquer membros da sua direcção. A Srª. Manuela Silvestre e o Sr. António Gonçalves são dois dos sete elementos dessa direcção.
Se a escolha dos três representantes for feita por sorteio, entre os sete membros da direcção do clube, qual é a probabilidade de a Srª. Manuela Silvestre e o Sr. António Gonçalves irem ambos à feijoada?
Apresente o resultado na forma de uma fracção irredutível.

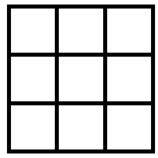
32. Na figura abaixo estão representados um prisma quadrangular regular e uma pirâmide cuja base $[ABCD]$ coincide com a do prisma. O vértice I da pirâmide coincide com o centro da base superior do prisma.



Considerando, ao acaso, cinco dos nove vértices da figura representada, qual é a probabilidade de que pelo menos quatro sejam da pirâmide?

33.

Pretende-se colocar, sobre um tabuleiro situado à nossa frente, como o representado na figura, nove peças de igual tamanho e feitio, das quais quatro são brancas e cinco são pretas.



Cada casa do tabuleiro é ocupada por uma só peça.

a) Mostre que existem 126 maneiras diferentes de as peças ficarem colocadas no tabuleiro.

b) Supondo que as peças são colocadas ao acaso, determine a probabilidade de uma das diagonais ficar só com peças brancas.

34. Um grupo de jovens, formado por cinco rapazes e cinco raparigas, vai dividir-se em duas equipas, de cinco elementos cada uma, para disputarem um jogo de basquetebol.
Supondo que a divisão dos dez jovens pelas duas equipas é feita ao acaso, determine a probabilidade de as equipas ficarem constituídas por elementos do mesmo sexo, isto é, de uma das equipas ficar só com rapazes e a outra, só com raparigas.
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

35. Uma turma de uma escola secundária tem 27 alunos: 15 raparigas e 12 rapazes.
O delegado de turma é um rapaz.
Pretende-se constituir uma comissão para organizar um passeio. A comissão deve ser formada por 4 raparigas e 3 rapazes. Acordou-se que um dos 3 rapazes da comissão será necessariamente o delegado de turma.

a) Quantas comissões diferentes se podem constituir?

b) Admita que os 7 membros da comissão, depois de constituída, vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros.
Supondo que eles se colocam ao acaso, qual é a probabilidade de as raparigas ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

36. A Joana tem na estante do seu quarto três livros de José Saramago, quatro de Sophia de Mello Breyner Andresen e cinco de Carl Sagan.

Quando soube que ia passar as férias a casa da sua avó, decidiu escolher seis desses livros, para ler durante este período de lazer. A Joana pretende levar dois livros de José Saramago, um de Sophia de Mello Breyner Andresen e três de Carl Sagan.

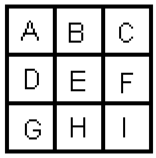
a) De quantas maneiras pode fazer a sua escolha?

b) Admita agora que a Joana **já seleccionou** os seis livros que irá ler em casa da sua avó.

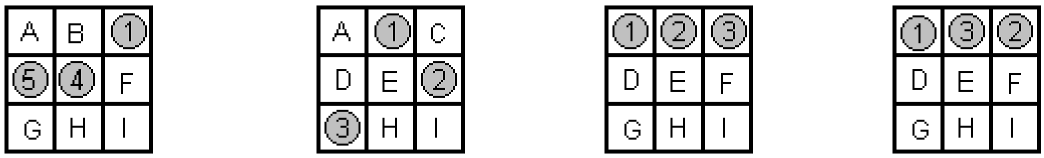
Supondo aleatória a sequência pela qual estes seis livros vão ser lidos, qual é a probabilidade de os dois livros de José Saramago serem lidos um a seguir ao outro?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

37. Considere um tabuleiro com nove casas, como o que está representado na figura.



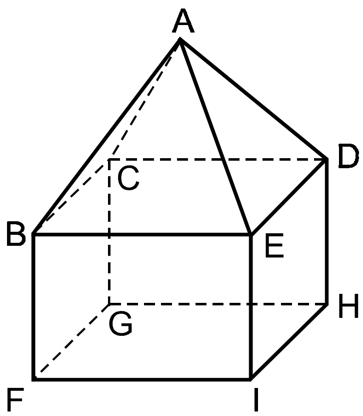
Suponha que dispomos de cinco peças, numeradas de 1 a 5.
Pretende-se escolher três dessas peças e, seguidamente, colocá-las no tabuleiro, não mais do que uma em cada casa, obtendo assim uma configuração de três peças sobre o tabuleiro. Na figura abaixo apresentam-se quatro possíveis configurações:



a) Quantas configurações diferentes se podem fazer?

b) Sabendo que, depois de escolhidas, as peças são colocadas no tabuleiro ao acaso, determine a probabilidade de as casas A e B ficarem livres.

38. Na figura está representado o sólido $[ABCDEFGHI]$



Dispomos de cinco cores (*amarelo, branco, castanho, preto* e *vermelho*) para colorir as suas nove faces.
Cada face é colorida por uma única cor.

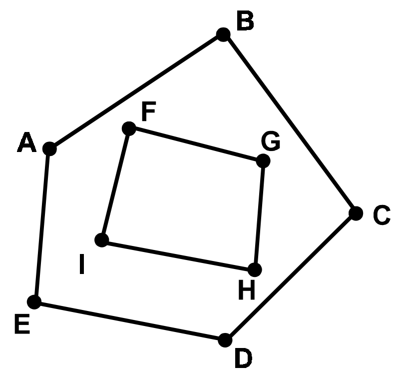
a) De quantas maneiras diferentes podemos colorir o sólido, supondo que as quatro faces triangulares só podem ser coloridas de *amarelo*, de *branco* ou de *castanho*, e que as cinco faces rectangulares só podem ser coloridas de *preto* ou de *vermelho*?

b) Admita agora que o sólido vai ser colorido ao acaso, podendo qualquer cor colorir qualquer face.
Determine a probabilidade de exactamente cinco faces ficarem coloridas de branco e as restantes faces com cores todas distintas.
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

39. Na figura estão representados dois polígonos:

- um pentágono $[ABCDE]$

- um quadrilátero $[FGHI]$



Dos nove vértices representados, não existem três colineares.

a) Determine quantos triângulos têm como vértices três dos nove pontos, de tal modo que dois vértices pertençam a um dos polígonos e o terceiro vértice pertença ao outro polígono.

b) A Sandra e o Jorge escolheram cada um, e em segredo, um dos nove vértices representados. Qual é a probabilidade de os dois vértices, assim escolhidos, pertencerem ambos ao mesmo polígono?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

40. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular.

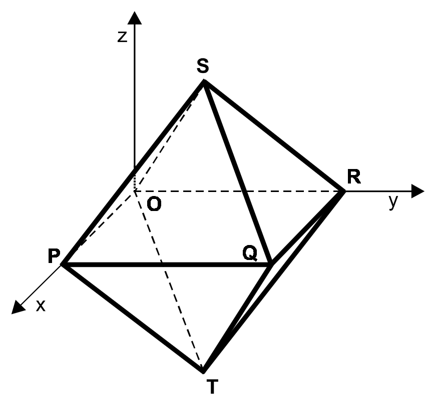
Sabe-se que:

- um dos vértices do octaedro é a origem O do referencial

- a recta ST é paralela ao eixo Oz

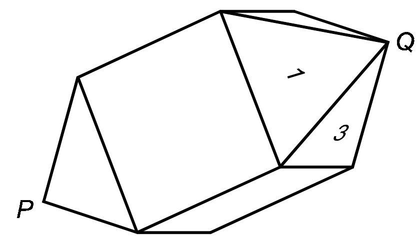
- o ponto P pertence ao semieixo positivo Ox

- o ponto R pertence ao semieixo positivo Oy



Escolhidos ao acaso dois vértices do octaedro, qual é a probabilidade de estes definirem uma recta contida no plano de equação $x = y$?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

41. Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.



a) Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).

Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

a1) De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

a2) De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

b) Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$, de tal forma que o vértice P coincida com a origem do referencial, e o vértice Q esteja no semieixo positivo Oy.

Escolhidos ao acaso três vértices distintos, qual é a probabilidade de estes definirem um plano paralelo ao plano de equação $y = 0$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

42. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Considere todos os triângulos cujos vértices são pontos de intersecção desta superfície esférica com os eixos do referencial.

Escolhido um desses triângulos ao acaso, determine a probabilidade de estar contido no plano definido por $z = 0$. Indique o resultado em forma de percentagem.

43. Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

a) Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

a1) Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

a2) Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes e ser maior do que $9\,800$. Apresente o resultado na forma de dízima, com três casas decimais.

44. Três casais, os Nunes, os Martins e os Santos, vão ao cinema.

a) Ficou decidido que uma mulher, escolhida ao acaso de entre as três mulheres, paga três bilhetes, e que um homem, escolhido igualmente ao acaso de entre os três homens, paga outros três bilhetes.
Qual é a probabilidade de o casal Nunes pagar os seis bilhetes? Apresente o resultado na forma de fracção.

b) Considere o seguinte problema:

Depois de terem comprado os bilhetes, todos para a mesma fila e em lugares consecutivos, as seis pessoas distribuem-nos ao acaso entre si. Supondo que cada pessoa se senta no lugar correspondente ao bilhete que lhe saiu, qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos, com o casal Martins no meio?

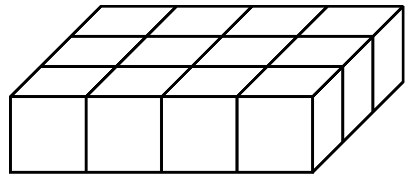
Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, explique por que razão $\frac{2^4}{6!}$ é uma resposta correcta a este problema.

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:
• referência à Regra de Laplace;
• explicação do número de casos possíveis;
• explicação do número de casos favoráveis.

45. Lança-se um dado perfeito quatro vezes seguidas. Qual é a probabilidade de obter pelo menos duas vezes o mesmo número?

46. Num quartel, os trinta novos recrutas formam, ao acaso, seis filas de cinco soldados cada. Qual é a probabilidade de que um dado grupo de cinco amigos fique na mesma fila?

47. Um jogo de cubos para crianças tem doze cubos, que permitem construir seis puzzles.



a) De quantas maneiras se podem dispor os doze cubos? (Tem em conta a posição dos cubos e, para cada cubo, a face que fica voltada para cima e a forma como esta fica orientada)

b) Uma criança junta os doze cubos ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela construa uma das seis imagens puzzle?

48. Num torneio de ténis, disputado por eliminatórias, estão inscritos 8 jogadores. Para definir os jogos da primeira eliminatória, realiza-se um sorteio que divide os oito jogadores em quatro grupos de dois jogadores (que vão jogar entre si).
No torneio estão inscritos quatro amigos. Qual é a probabilidade de nenhum deles enfrentar um dos outros na primeira eliminatória?

49. Equaciona e resolve o seguinte problema:
Uma caixa contém 6 bolas brancas e p bolas pretas.
Tiram-se, ao acaso, duas bolas da caixa. Sabendo que a probabilidade de serem ambas pretas é $\frac{1}{12}$, qual é o valor de p?