O Princípio de Eudoxo-Arquimedes

A primeira proposição do Livro X dos *Elementos* de Euclides é o fundamento do chamado "Método de Exaustão" que permitiu um tratamento rigoroso dos cálculos de áreas e volumes. O termo «exaustão» apareceu pela primeira vez em 1647 e por isso, muitas vezes, este método é designado por "Método de Eudoxo"

Este método, que se tornou o modelo Grego nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes era muito rigoroso, no entanto, tinha um grande senão: o resultado, para ser provado, tinha de ser conhecido à partida. Tal facto levanta uma questão: como eram conhecidos esses resultados? Em 1906 foi descoberta uma carta de Arquimedes a Eratóstenes, conhecida pelo nome de "O Método", onde Arquimedes descreve o seu método de descoberta dos resultados, resultados esses que posteriormente prova pelo Método de Exaustão.

Arquimedes fez aplicações muito importantes do chamado "Método de Exaustão", as quais contribuíram para marcar a importância deste método na matemática antiga e para o desenvolvimento de grande parte da Matemática como a concebemos hoje. Como tal, muitas vezes este método é conhecido pelo "Princípio de Eudoxo-Arquimedes".

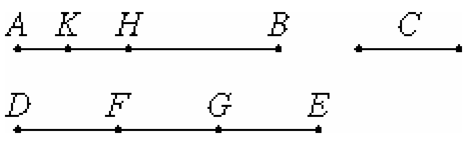
Este texto está elaborado em duas partes, na parte apresentaremos o enunciado da primeira proposição do Livro X dos *Elementos* de Euclides, que como já dissemos é o fundamento do "Método de Exaustão". A sua demonstração é feita utilizando uma linguagem/notação actual. Na segunda parte será feita uma aplicação do "Método de Exaustão" na prova da proposição 1 da obra "*A Medida dum Círculo*" de Arquimedes.

José Miguel Sousa, Abril de 2004
Curso APM

Elementos X, 1: Dadas duas grandezas diferentes, se da maior se subtrair uma grandeza maior do que a sua metade, e do que sobrar uma grandezas maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, sobrará uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.

Dem.:

Sejam AB e C duas grandezas desiguais em que AB é a maior.



Euclides afirma que se de AB for subtraída uma grandeza maior do que a sua metade, e do que ficou subtrairmos uma grandeza maior do que a sua metade e se repetirmos o processo continuamente, ficará uma grandeza que é menor do que a grandeza C.

De modo a utilizar uma notação actual vamos designar a grandeza AB por α e a grandeza C por β.

Temos assim duas grandezas α e β, grandezas desiguais e do mesmo tipo, em que α é a maior. Pela[1] Definição V, 4 existe um múltiplo de β que excede α, isto é existe um número natural n tal que $n\beta > \alpha$.

Retirando a α uma grandeza maior do que sua metade sobra uma grandeza α_1 tal que $n\beta - \beta > \alpha_1$ (a $n\beta$ retirou-se β e repare-se que $\beta < (n\beta)/2$).

E retirando a α_1 uma grandeza maior do que a sua metade sobra uma grandeza α_2 tal que $n\beta - \beta - \beta > \alpha_2$ (a $n\beta$ retirou-se β e repare-se que $\beta < (n\beta-\beta)/2$).

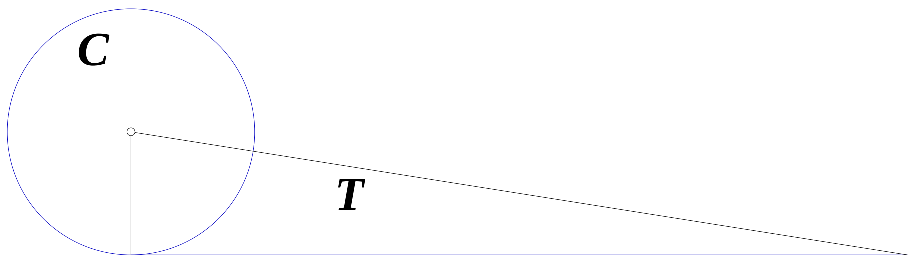
Repetindo este processo ao fim de n-2 passos obtemos uma grandeza α_{n-2} tal que $2\beta > \alpha_{n-2}$.

Retirando a α_{n-2} uma grandeza maior do que a sua metade sobra uma grandeza α_{n-1} tal que $\beta > \alpha_{n-1}$, (a 2β retirou-se β que é exactamente a sua metade).

Portanto ao fim de n-1 passos, obtém-se uma grandeza α_{n-1} tal que $\alpha_{n-1} < \beta$, quer isto dizer que se obteve uma grandeza menor do que a menor das grandezas inicialmente dadas.

Q.e.d.

Da Medida dum Circulo, 1: Todo o círculo equivale ao triângulo rectângulo para o qual o raio é igual a um dos lados adjacentes ao ângulo recto e o perímetro é igual à base[2].



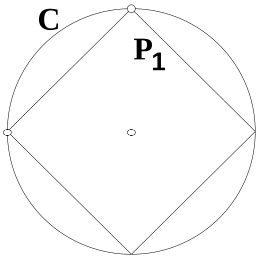
Dem.:

Designemos por C a medida da área do círculo C, isto é, C tanto representará o círculo (figura geométrica) como a sua área (grandeza), do mesmo modo designemos por T a medida da área do triângulo T.

Na prova deste resultado vamos utilizar uma dupla redução ao absurdo.

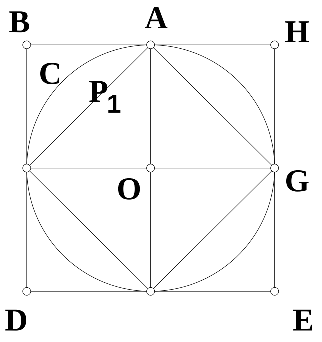
I - Vamos supor que C > T:

Temos assim duas grandezas desiguais e do mesmo tipo (áreas), C – T e C, em que a grandeza C – T é a menor delas.



Comecemos por considerar o círculo de área C, e um quadrado P_1 inscrito em C.

À área do círculo C subtrai-se a área do quadrado P_1, inscrito em C, e assim, estamos a retirar mais do que metade da área de C.



- Provemos que de facto se retirou uma grandeza (área de P_1) maior do que metade de C.

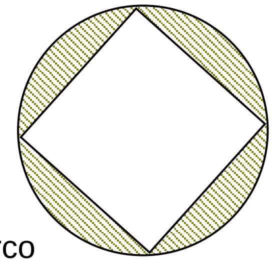
Seja BDEH um quadrado circunscrito a C. Visto que a área do quadrado BDEH é igual a oito vezes a área do triângulo AOG, temos que a área do quadrado BDEH, circunscrito a C, é o dobro da área do quadrado P_1 inscrito em

C, pois a área deste último é o quádruplo da área do triângulo AOG, circunscrito ao círculo C.

Por outro lado, a área do círculo é menor que a área do quadrado BDEH. Assim metade da área do círculo será menor do que metade da área do quadrado BDEH. Portanto podemos afirmar que metade da área do círculo é menor do que metade da área do polígono P_1, isto é, área do polígono P_1 é maior do que metade da área do círculo.

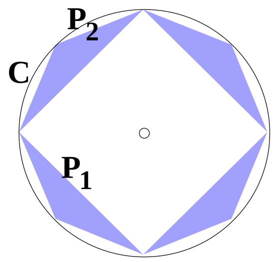
Provamos, assim, que à área do círculo subtraímos uma área que é mais do que a sua metade.

Continuemos:



Sobram 4 "segmentos de arco" como ilustrados na figura ao lado.

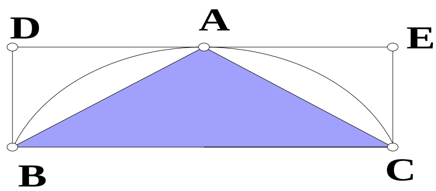
De modo a continuar o processo anterior, vamos, em cada um destes "segmentos de arco", marcar o ponto médio do respectivo arco e unir este ponto aos vértices do quadrado que foi retirado, construindo assim 4 triângulos isósceles.



À área dos 4 "segmentos de arco", a tracejado verde na figura anterior, vamos subtrair a área dos 4 triângulos isósceles, que estão entre o octógono P_2 e o quadrado P_1, a azul na figura junta.

Assim, estamos a retirar a uma grandeza uma grandeza maior do que a sua metade.

- Provemos que de facto ao retirar a área a azul estamos a retirar mais do que metade da área a verde.



Atendendo a que a figura pode ser dividida em 4 partes iguais, basta provar para um "segmento de arco".

Consideremos, na figura junta, o "segmento de arco" BAC e provemos que ao retirar a área do triângulo ABC estamos a retirar mais do que metade da área do "segmento de arco" em causa.

Seja o rectângulo DBCE cuja altura e base são as mesmas do triângulo ABC. Uma vez que a área do rectângulo DBCE é igual ao dobro da área do triângulo ABC (não esquecer que o ponto A é o ponto médio do segmento DE) e a área do rectângulo DBCE é maior do que a área do "segmento de arco", podemos afirmar que a área do triângulo ABC é maior do que metade da área do "segmento de arco".

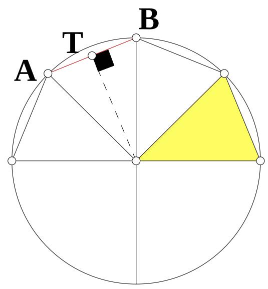
Provamos assim, que à área do "segmento de arco" foi subtraída uma área (a área do triângulo ABC) que é mais do que a sua metade.

Continuemos:

Repetindo este processo, podemos sempre retirar à grandeza anterior uma grandeza que é maior do que a sua metade e assim, pela proposição dada (*Elementos* X, 1), a certa altura existe um polígono regular P, com medida de área P, inscrito no circulo C, tal que C – P < C – T.

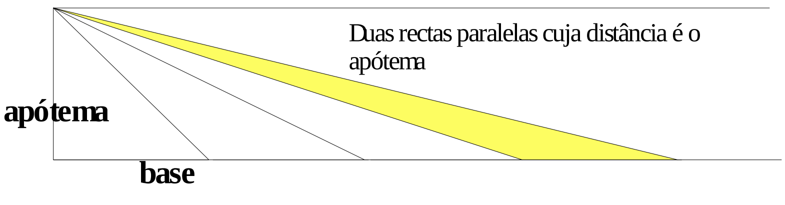
Donde P > T . (1)

Mas tal facto é um absurdo, como veremos a seguir.



Consideremos a figura ao lado. O segmento de recta AB tem menor comprimento do que o arco AB, portanto o perímetro do polígono inscrito é menor que o perímetro da circunferência.

O polígono inscrito pode decompor-se em vários triângulos, cuja altura é o apótema do polígono e cada base um dos lados do polígono inscrito.



A área de tal polígono é igual à soma das áreas de todos os triângulos que o compõem (com a mesma base, pois o polígono é regular);

Área polígono =
= área do triângulo*1* + área do triângulo*2* + ... + área do triângulo*n*
=(apótema x base1)/2 + (apótema x base2)/2 + ... (apótema x basen)/2
= (apótema x perímetro do polígono)/2 .

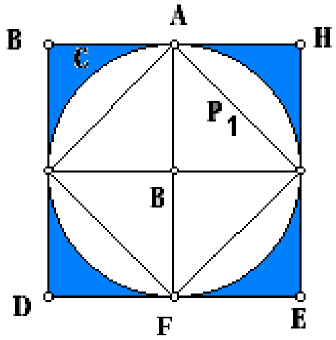
Mas o apótema do polígono é menor do que o raio da circunferência bem como o perímetro do polígono é menor do que o perímetro da circunferência.

Assim, vem que a área do triângulo inicial (=raio x perímetro/2) é maior do que a área do polígono, isto é $P < T$, que é um absurdo com (1) .

Pelo exposto podemos concluir que não pode acontecer o inicialmente suposto, isto é, $C > T$.

II - Vamos supor que $C < T$:

Temos que $T – C > 0$. Vamos considerar duas grandezas desiguais: $T – C$ e o quadrado BDEH, circunscrito ao círculo C. Estamos portanto na posse de duas grandezas do mesmo tipo em que $T – C$ é a menor delas (em princípio, podia não ser. Mas nesse caso teríamos desde logo a tese: $P \leq T – C < T$).



À área do quadrado BDEH, circunscrito ao círculo C subtraimos a área do círculo C, que é mais do que metade da área do quadrado .

➢ Provemos que de facto se retirou, à área do quadrado, uma grandeza C maior do que a sua metade:

$A_{BDEH} > C$ (*<u>nota</u>: A_{BDEH} representa a área do quadrado BDEH*)

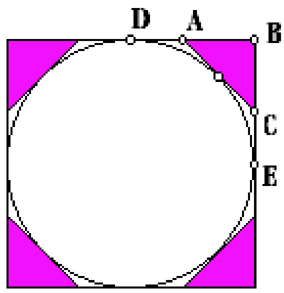
Mas,

$C > A_{P1}$ e $A_{BDEH} = 2A_{P1}$

Logo $C > A_{BDEH} / 2$.

O que prova que a área C retirada à área do quadrado BDEH é uma grandeza maior do que metade da área do referido quadrado .

Continuemos:

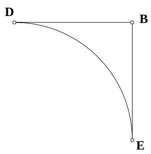


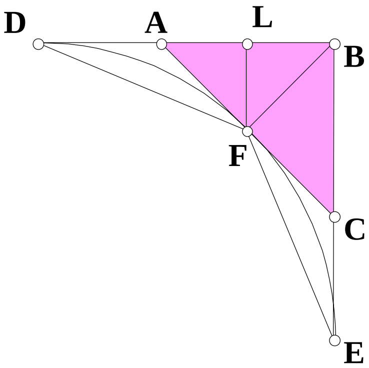
Assim ficamos com 4 “cantos” planos, a azul na figura anterior. Nestes “cantos” traçemos tangentes que passam pelo ponto médio de cada um dos arcos da circunferência.

Retirando os “triângulos” (a rosa na figura ao lado), estamos a retirar mais do que metade da área que sobrou.

➢ Provemos que de facto se retirou, à área anterior (a azul), uma grandeza (área a rosa) maior que a sua metade:

Atendendo a que a figura pode ser dividida em 4 partes iguais vamos considerar apenas o triângulo ABC e provar que a sua área é maior do que metade da área da figura BED.





A tangente AC é perpendicular à recta BF que passa pelo centro da circunferência (não esqueçamos que o ponto B é um dos vértices do quadrado circunscrito ao círculo e F o ponto médio do arco DFE).

Sendo assim, o triângulo ABF é rectângulo em F.

A medida de comprimento de BD é igual à medida de comprimento de BE, pois dada uma circunferência e um ponto exterior a ela, este dista igualmente de dois pontos de tangência da circunferência (Elementos III,36; potência de um ponto em relação a uma circunferência).

Por outro lado a medida de comprimento do segmento de recta AF é igual à medida de comprimento do segmento de recta AD, pela mesma razão exposta anteriormente.

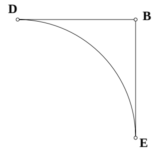
O lado AB é a hipotenusa do triângulo ABF (rectângulo em F) e tem medida de comprimento maior do que qualquer dos seus catetos.

Assim,

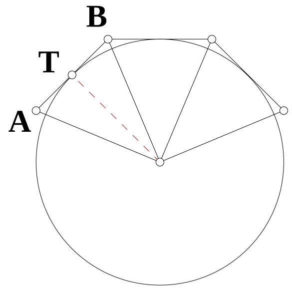
$\overline{AB} > \overline{AF}$ e como e $\overline{AF} = \overline{AD}$ podemos afirmar que $\overline{AB} > \overline{AD}$.

Mas os triângulos AFB e ADF têm a mesma altura FL mas bases diferentes. Logo o triângulo ABF tem maior área (porque tem maior base) do que o triângulo ADF. Consequentemente a área do triângulo ABC é maior do que a área da figura ADFECA.

Concluímos assim que a área do triângulo ABC é maior do que metade da área da figura DFEB.



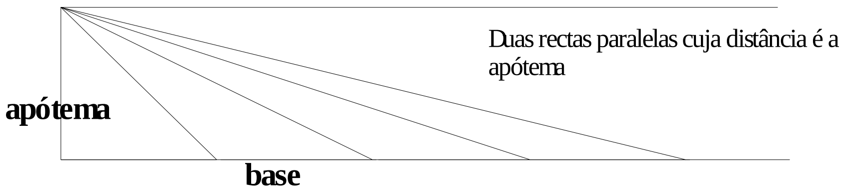
Continuando com o procedimento de retirar à área obtida uma área maior do que a sua metade, teremos um polígono P, circunscrito a C, tal que a certa altura a grandeza P – C será menor do que a menor das grandezas dadas, isto é:



$$P - C < T - C \text{. Donde } P < T \text{.} \quad (2)$$

Mas tal facto é um absurdo como veremos a seguir.

O segmento de recta AB tem maior comprimento do que o arco AB, portanto o perímetro do polígono circunscrito é maior que o perímetro da circunferência. O polígono circunscrito pode ser decomposto em vários triângulos, cuja altura é o apótema do polígono e cujas bases são os lados do polígono (que é regular).



A área do polígono é igual à soma das áreas dos triângulos todos que o compõem (com a mesma base e a mesma altura) ;

Área polígono =
= área do triângulo*1* + área do triângulo*2* + ... + área do triângulo*n*
=(apótema x base1)/2 + (apótema x base2)/2 + ... (apótema x basen)/2
= (apótema x perímetro do polígono)/2 .

Mas o apótema do polígono é igual ao raio da circunferência e o perímetro do polígono é maior do que o perímetro da circunferência.

Assim, vem que a área do triângulo inicial (=raio x perímetro/2) é menor do que a área do polígono, isto é P > T, que é um absurdo com (2).

Pelo exposto podemos concluir que não pode acontecer C < T .

Finalmente por I e II podemos afirmar que C = T .

Q.e.d.

BIBLIOGRAFIA:

- Euclides – *Elementos de Euclides, tradução portuguesa*. Real Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1824.
- Eves, Howard - *An Introduction to The History of Mathematics*, New York, 1964.
- Heath, T. - *A History of Greek Mathematics* (2 volumes). Dover Publications, New York, 1921.
- Heath, T. - *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 3 vols (2ªed), Dover Publications, New York, 1956.
- Katz, V. - *A History of Mathematics, an Introduction* (2ªed), Addison Wesley, New York, 1998.
- Struik, J. – *História Concisa das Matemáticas*. Gradiva, Lisboa, 1989.
- Sueli Costa – *Pela trilha de Arquimedes*, Actas Profmat98, APM, Lisboa, 1998.

[1] Definição V, 4 – Grandezas têm entre si razão, quando a grandeza menor, tomada um certo número de vezes, pode exceder a grandeza maior.

De acordo com a definição 4 do livro V, dos *Elementos* de Euclides, está implícito que esta proposição só tem sentido se as grandezas consideradas forem do mesmo tipo, como por exemplo áreas ou volumes.

[2] No enunciado quando Arquimedes refere "...círculo equivale ao triângulo..." quer dizer "...a medida da área do círculo é igual à medida da área de um triângulo...".