TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS
E
SIMETRIAS

Susana Ferreira

Coimbra, 2000

ÍNDICE

INTRODUÇÃO. 3

MOVIMENTOS RÍGIDOS OU ISOMETRIAS. 4

PADRÕES. 9

FRISOS. 10

NOTAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DOS GRUPOS DE FRISOS. . . 13

OS SETE GRUPOS DE FRISOS. 16

BIBLIOGRAFIA 21

INTRODUÇÃO

O trabalho tem como objectivo explorar um tipo especial de padrões e sugerir um método de estudo mais concreto e motivador para desenvolver as transformações geométricas. Este tema pouco atraente para os alunos, que desenvolveram uma aversão à geometria, pode aliciá-los a investigações e modificar a sua opinião.

O trabalho tem como objectivo sugerir uma forma diferente de introduzir e explorar as transformações geométricas e simetrias através de exemplos de padrões recolhidos pelos alunos. Recorrendo ao trabalho em grupo e ao confronto de ideias, os alunos procurarão identificar as transformações geométricas (tipo de frisos) e conjecturar alguns resultados. Poderão, ainda, recorrer a programas interactivos de Geometria – Cabri-Géomètre, GSP, Kali e/ou Cinderella – para visualizar e conjecturar algumas propriedades. Com efeito, este tipo de explorações com os alunos têm efeitos muito positivos tanto na apreensão como na compreensão das novas noções, para além de induzir uma maior motivação pela disciplina.

Seria interessante expor alguns exemplos de aplicação deste tema noutras ciências, já que, o estudo de pavimentações e padrões têm sido fortemente incentivado por elas. Por exemplo: na Metalurgia e Geologia (a estrutura dos cristais), na Biologia (arranjo das células nos tecidos do corpo do ser humano) e na Teoria da Comunicação (melhoramento e compactação de imagens e códigos secretos).

Nas próximas páginas será feita uma introdução a este tema onde serão explicados conceitos básicos para a sua compreensão.

MOVIMENTOS RÍGIDOS OU ISOMETRIAS:

Isometrias são transformações do plano que não distorcem as formas e tamanhos, por isso, são conhecidas, também, como movimentos rígidos. Pertencem a esta categoria todos os movimentos que conservam a distância e a posição relativa entre pontos.

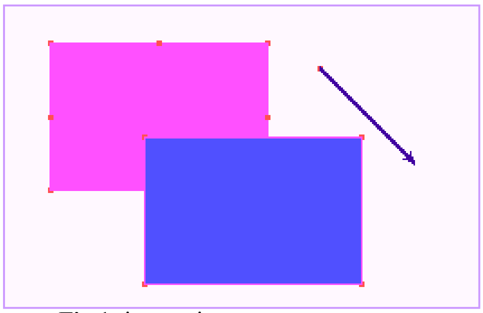


Fig.1: isometria

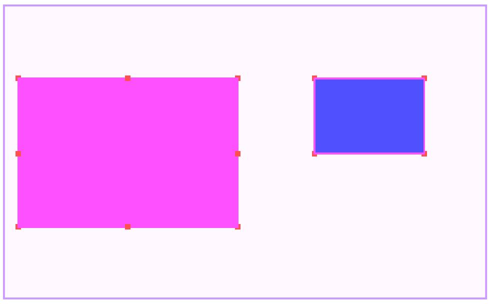


Fig.2: não é isometria

Na figura 1 está representado um movimento que mantém a forma e tamanho da figura original logo é uma isometria, enquanto o movimento, representado na figura 2, altera o tamanho da figura (homotetia de razão ½).

A isometria representada na figura 1 é, provavelmente, a mais familiar designa-se por **translação.** Neste movimento, todos os pontos sofrem uma deslocação com a mesma quantidade, na mesma direcção, portanto, é evidente que qualquer figura transformada conserva a sua forma e tamanho.

Outro tipo de isometria muito comum é a **rotação**, que contrariamente à translação possui um ponto fixo. Na rotação todos os pontos do plano movimentam-se rodando a mesma quantidade em torno deste ponto, que se designa **ponto central**.

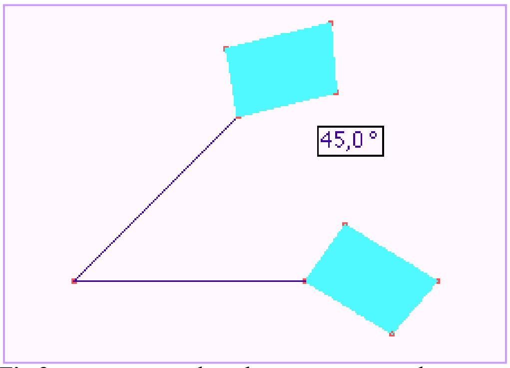


Fig.3: a rotação roda todos os pontos no plano em torno de um ponto.

O facto do movimento possuir ou não ponto fixo faz distinguir estes dois tipos de isometrias.

Será que existem isometrias que possuem uma maior quantidade de pontos fixos?

A resposta é afirmativa, como podemos observar na figura seguinte, a isometria por reflexão em relação a uma linha espelho (ou eixo) fixa uma infinidade de pontos que coincide com essa linha.

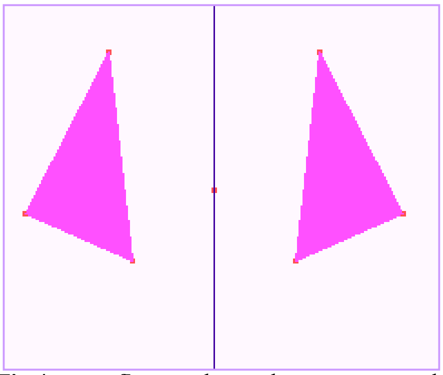


Fig.4: a reflexão alça todos os pontos do plano para o outro lado da linha de espelho.

A reflexão é, também, conhecida por simetria axial dado que é determinada por um eixo. Este movimento verifica as seguintes propriedades:

- os pontos do espelho não se movem por efeito da reflexão;
- a distância de um ponto ao espelho é igual á distância da imagem desse ponto ao espelho.

Verificamos, ainda, que ao designarmos na figura original um determinado sentido ele aparece invertido na figura final, ou seja, a reflexão altera a orientação dos pontos do plano como podemos observar na figura seguinte:

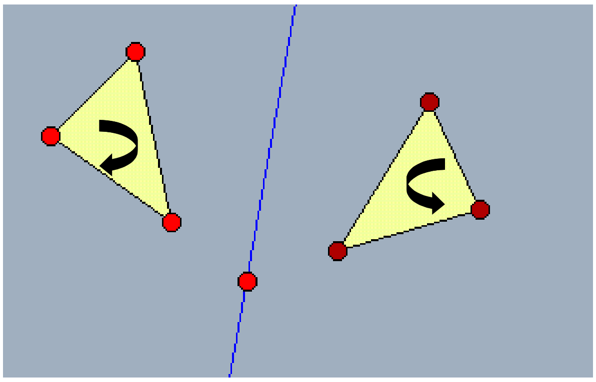


Fig.5 : inversão da orientação da figura.

A inversão de orientação pode ser entendida como consequência do processo de construção, ou seja, para produzir uma reflexão temos que levantar a figura e rodá-la. Ao passo que uma rotação ou uma translação resulta de um arrastamento da figura original, sem sair do plano.

Por fim, temos a reflexão deslizante que é uma isometria menos conhecida e que combina uma reflexão com uma translação na direcção do eixo de reflexão.

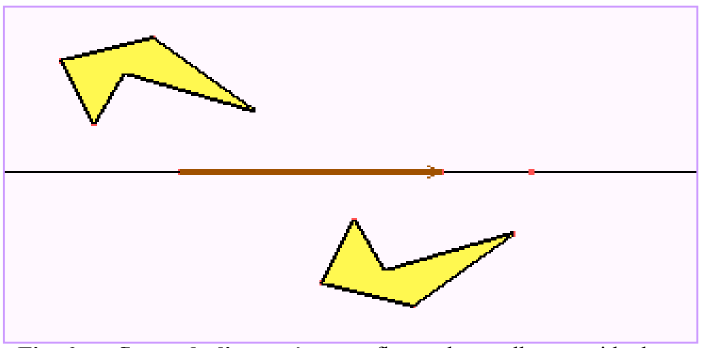


Fig. 6 : reflexão deslizante é uma reflexão de espelho, seguida de uma translação paralela ao espelho.

Deste modo, podemos observar que a reflexão deslizante não pode ser distinguida das outras isometrias partindo, somente, do número de pontos fixos, dado que identicamente à translação este movimento não tem pontos fixos. De modo análogo, não podemos fazer distinção das isometrias considerando, somente, o facto do movimento preservar ou não a orientação da figura. Efectivamente, sendo a reflexão deslizante uma composição das isometrias reflexão e translação, este movimento vai alterar a orientação da figura no plano e não vai fixar pontos. Contudo se considerarmos ambos aspectos cada isometria pode ser convenientemente identificada:

Isometria	Pontos fixos	Orientação
Translação	Nenhum	Preserva
Rotação	Um [ponto central]	Preserva
Reflexão	Infinitos [linha de espelho]	Inverte
Reflexão deslizante	Nenhum	Inverte

Dado que a composição de duas isometrias é, obviamente, uma isometria vamos combinar os movimentos identificados: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante e verificar se define ou não uma isometria deste tipo.

Combinação de duas translações:

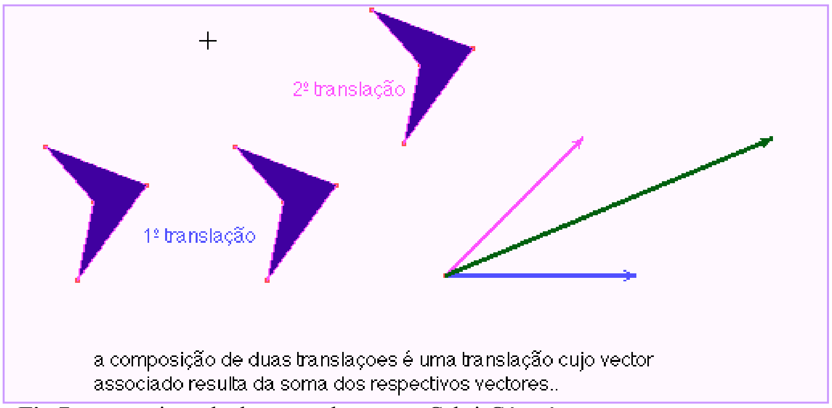


Fig.7: composição de duas translações no Cabri-Géomètre.

Combinação de duas rotações:

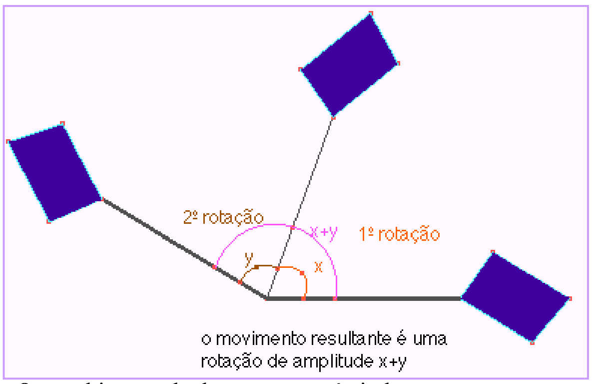


Fig.8: combinação de duas rotações é ainda uma rotação.

Combinação de duas reflexões:

Ao combinar duas reflexões verificamos que o facto das linhas de espelho intersectarem ou não conduz a situações diferentes, como podemos observar nas figuras seguintes.

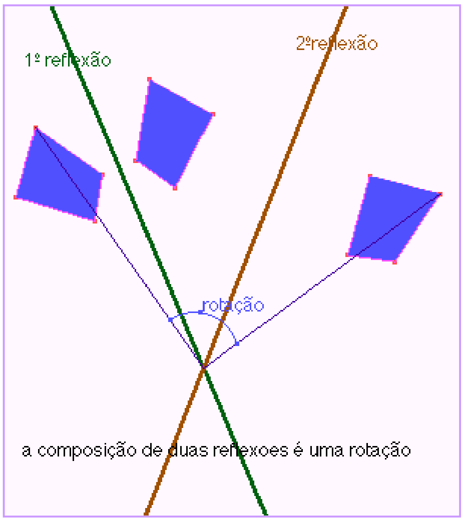


Fig.9: combinação de duas reflexões cujas linhas de espelho intersectam num ponto.

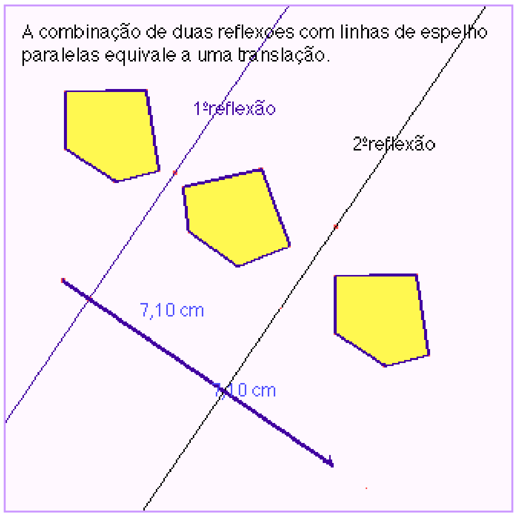


Fig.10: combinação de duas reflexões cujas linhas de espelho são paralelas.

Se as linhas intersectarem, o movimento resultante da combinação de duas reflexões é uma rotação (fig.9), cujo ponto central é o ponto de intersecção. Caso contrário, o movimento será uma translação (fig.10). Podemos confirmar e generalizar estas combinações para um maior número de reflexões, ou seja, sucessivas reflexões com eixos paralelos ou não produzem translações ou rotações, respectivamente.

Dado que, a translação e a rotação podem ser obtidos por combinação de duas reflexões, a reflexão deslizante resultará de três reflexões, duas reflexões que originem a translação e outra que será a própria reflexão (fig11).

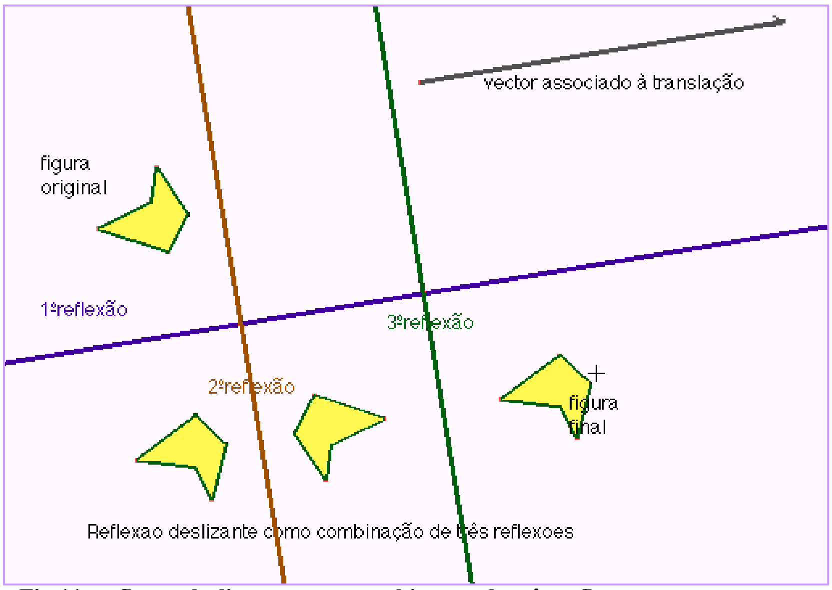


Fig.11: reflexão deslizante como combinação de três reflexões.

De modo análogo, combinar uma translação com uma rotação pode ser feita pensando em duas reflexões que originem a respectiva translação e outras duas que produzem a rotação. Através do programa Cabri-Géomètre podemos construir esta combinação de movimentos e verificar que obtemos sempre um movimento da lista inicial.

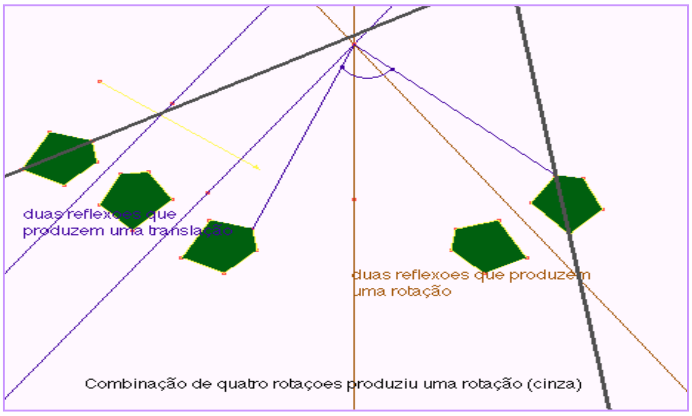


Fig.12(A)

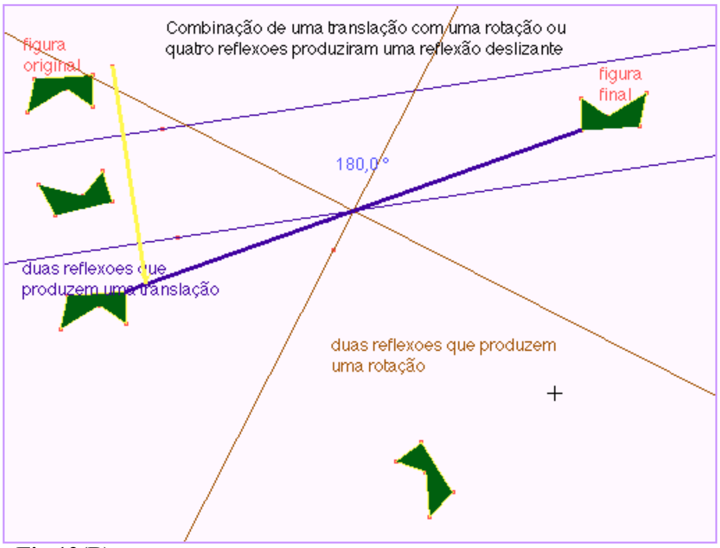


Fig.12(B)

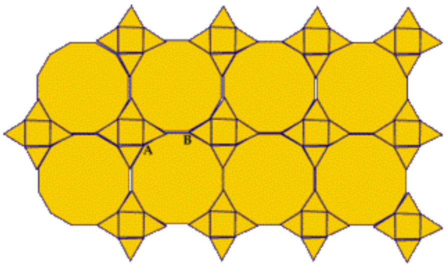
Fig.12 (A), (B) : exemplos de movimentos obtidos por combinação de uma translação e uma rotação ou equivalentemente, quatro reflexões.

Podemos concluir que qualquer isometria do plano é uma translação, rotação, reflexão ou reflexão deslizante dado que qualquer combinação destes movimentos produz um deles.

PADRÕES

Agora, já sabemos o que é uma isometria e os movimentos que verificam a sua definição, podemos então analisar uma aplicação destas noções.

No dia-a-dia utilizamos com bastante frequência e sem dar conta a palavra "padrão": padrão do tecido, padrão monetário, padrão de medidas, etc. Em matemática, esta palavra tem outro significado, que é, geralmente, confundido com pavimentação mas, são noções bastante diferentes. Uma pavimentação é um conjunto numerável de ladrilhos que cobrem o plano sem falhas nem sobreposições enquanto o **padrão** é uma repetição de uma figura inicial, a que denominamos **motivo,** segundo uma determinada ordem.



Fragmento de uma pavimentação.

Padrão cujo motivo é uma pegada.

Os padrões podem ser finitos ou infinitos consoante o número de cópias seja finito ou infinito, respectivamente. Contudo, na realidade, encontramos somente padrões finitos mas, a nossa capacidade de abstracção permite-nos imaginar partes de padrões que se estendem indefinidamente.

Ao consultar diferentes obras, sobre este assunto, verificamos que existem autores que consideram diversos tipos de padrões não havendo em certos casos qualquer tipo de ligação. Vamos considerar os seguintes tipos de padrões:

- *papéis de parede*: padrão com simetria de translação em direcções diferentes (independentes); (fig.13)
- *frisos ou padrões* de faixa: padrões com simetria de translação numa única direcção; (fig.15)
- *padrões de roseta*: o motivo repete-se como se constituísse pétalas de uma flor à volta do caule. (fig.14)

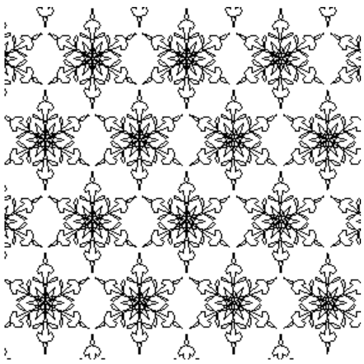


Fig.13: papel de parede

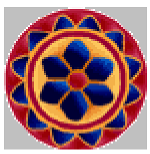


Fig. 14: padrões de roseta

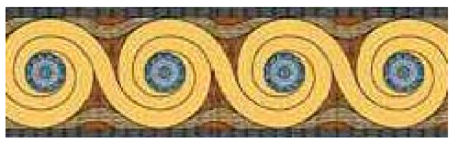


Fig. 15: frisos

Num papel de parede a repetição do motivo verifica uma propriedade que consiste na existência de duas translações linearmente independentes tais que o desenho final é resultado de todas as transformações geradas por essas translações. O nosso estudo vai limitar-se a um tipo de padrão, os frisos.

FRISOS

Como já foi referido um padrão de faixa tem, por definição, simetria de translação numa única direcção; deste modo só poderá apresentar alguns tipos de simetria. Por exemplo, num friso não pode existir simetria de rotação diferente da meia-volta, porque esse facto implicaria simetria de translação com direcções diferentes da faixa. (ver esquema, fig.16) Note-se que a simetria deve ser verificada tanto no motivo como ao longo do friso.

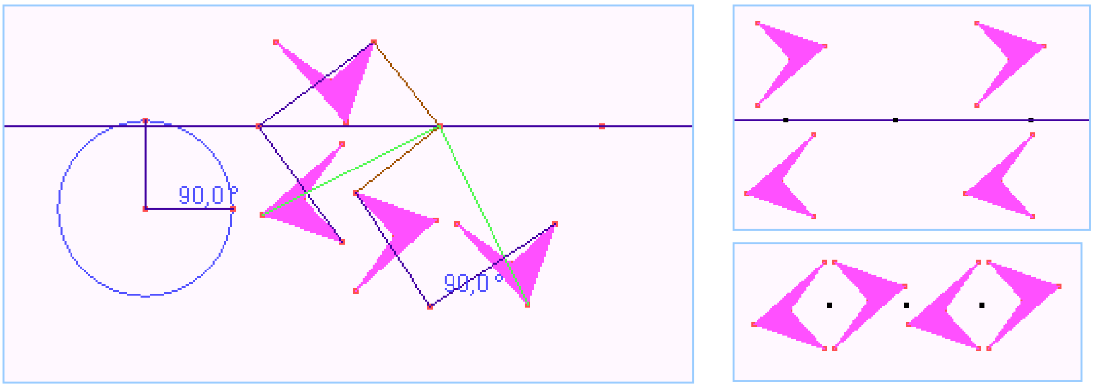


Fig. 16: rotação de 90º graus implica um padrão que não verifica a definição de friso. À esquerda encontram-se dois esquemas de frisos com simetria de rotação (180º), verificamos que os centros de rotação (pontos a preto) são pontos de simetria.

Para além da meia-volta, que tipos de simetrias podem revelar os frisos?
Esta questão incita-nos a investigar os tipos de simetria possíveis num friso. Dado que existe uma infinidade de motivos, temos que nos abstrair do seu aspecto, considerando o motivo como sendo um ponto ou uma figura sem qualquer tipo de simetria. Visto que dois frisos podem, à partida, parecer muito diferentes, (com motivos distintos) e no entanto, verificarem o mesmo tipo de simetria na reprodução do motivo ao longo da faixa.

Pode acontecer que o friso não apresente qualquer outro tipo de simetria além da translação, para isso basta repetir o motivo de modo que as cópias estejam equidistantes ao longo do friso, ou seja, aplicando ao motivo translações associadas a um determinado vector.

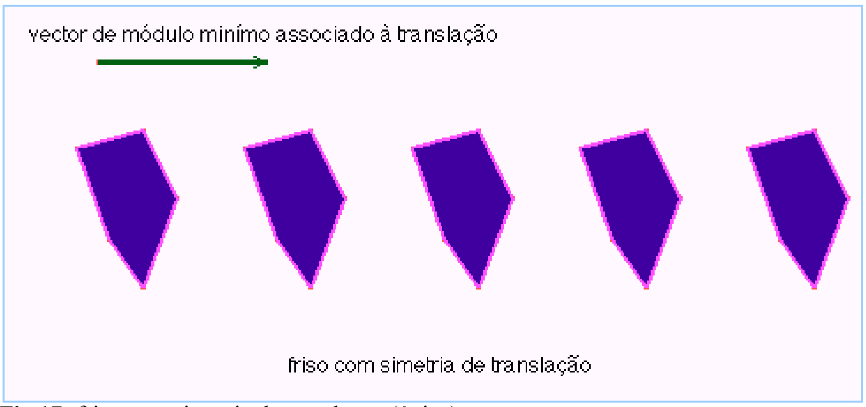


Fig.17: friso com simetria de translação (única)

Relativamente à simetria por reflexão e atendendo que o friso pode ser considerado como uma faixa horizontal, observamos que as únicas possibilidades de este apresentar simetria de reflexão é quando a linha de espelho é vertical (perpendicular á linha central) ou horizontal (coincidindo com a linha central do friso).

Fig.18: friso com simetria de reflexão vertical

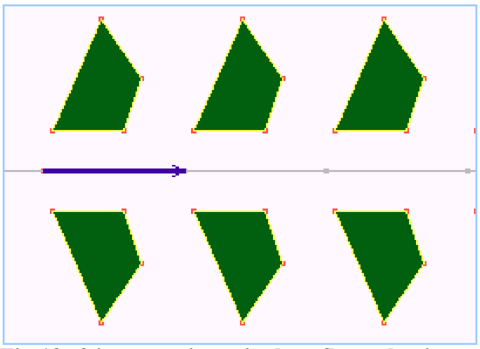


Fig.19: friso com simetria de reflexão horizontal

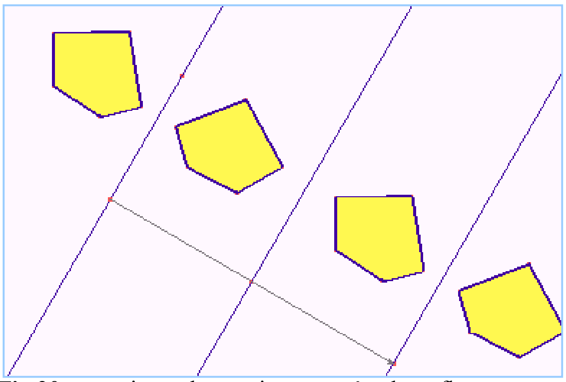


Fig.20: repetição do motivo através de reflexões com linha de espelho diagonal, verificamos que o vector associado à translação (simetria da figura) tem direcção perpendicular à linha de espelho.

Para terminar a análise das isometrias que se verificam nos frisos resta a reflexão deslizante. Como consequência dos resultados anteriores podemos concluir, que a única reflexão deslizante possível, tem como linha de espelho a linha central da faixa e direcção da translação paralela.

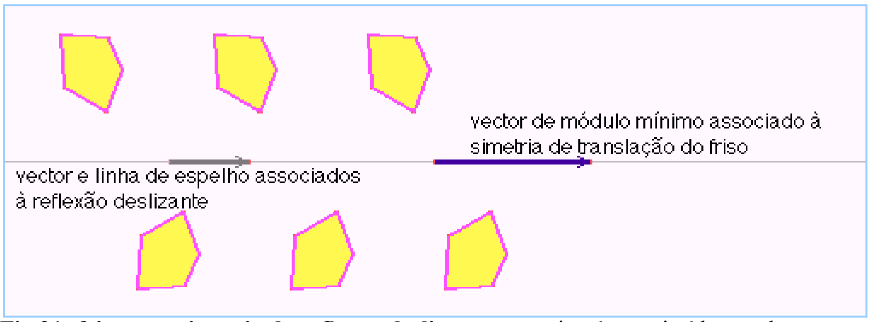


Fig.21: friso com simetria de reflexão deslizante: o motivo é constituído por duas figuras simétricas obtidas uma da outra por reflexão deslizante.

Da definição de friso vem garantida a simetria de translação mas, podemos afirmar que ainda é possível revelar outros tipos de simetria: rotação 180º (meia-volta), reflexão horizontal, reflexão vertical ou reflexão deslizante.

Resta saber se podemos encontrar qualquer combinação destas simetrias num friso...

Se aplicarmos a uma figura uma reflexão vertical seguida por uma reflexão deslizante obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa segundo uma determinada distância constitui um friso com simetrias de reflexão vertical e deslizante.

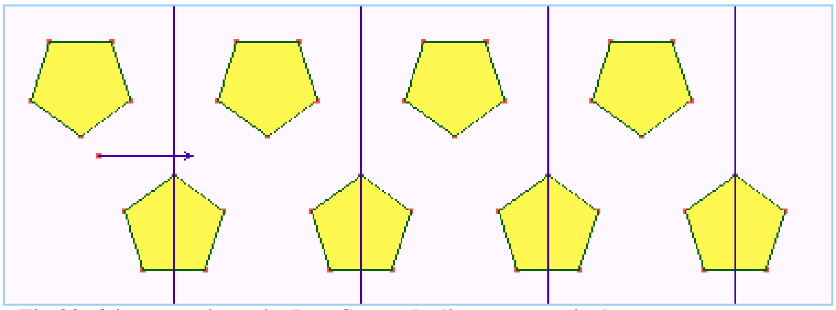


Fig.22: friso com simetria de reflexão deslizante e vertical

Se combinarmos uma reflexão vertical com uma reflexão horizontal e procedermos de modo análogo, obtemos um friso com simetria de reflexão vertical e horizontal.

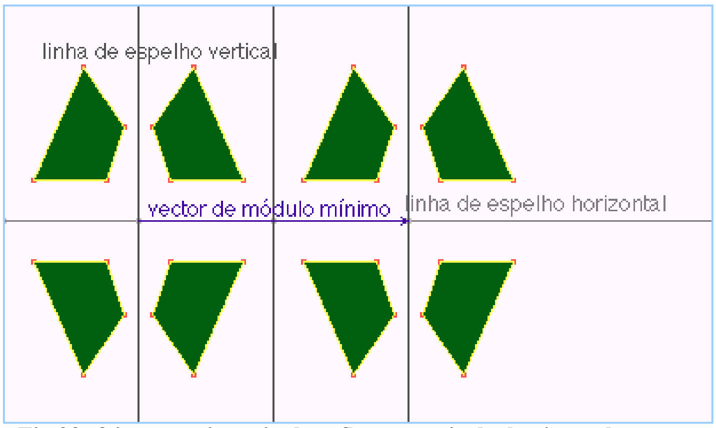


Fig.23: friso com simetria de reflexão vertical e horizontal

Estas combinações definem sete grupos de frisos distintos e podemos provar que só pode existir este número de grupos. Iremos provar esta afirmação logo após o próximo capítulo onde é introduzida a notação e classificação destes grupos. No entanto, podemos verificar que estes sete tipos de frisos possuem as seguintes características:

Tipo	Meia-volta	Reflexão horizontal	Reflexão vertical	Reflexão deslizante
1	Não	Não	Não	Não
2	Não	Não	Não	Sim
3	Não	Não	Sim	Não
4	Sim	Não	Não	Não
5	Sim	Não	Sim	Sim
6	Não	Sim	Não	Não
7	Sim	Sim	Sim	Não

NOTAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO PARA OS GRUPOS DE FRISOS:

Durante a consulta de livros e artigos sobre os frisos deparamo-nos com duas notações diferentes para classificar os grupos de frisos, cada uma usando um processo diferente.

Uma das notações provém da notação standard cristalográfica para os frisos e é constituída por 4 símbolos. O primeiro símbolo " ***p*** " é igual para os sete grupos de frisos e representa a repetição na direcção horizontal (translação) característica deste tipo de padrões.

Os restantes símbolos podem ser:

m: → aparece em segundo lugar se existir reflexão vertical senão fica um "***1*** " neste lugar;
→ aparece em terceiro lugar se existir reflexão segundo uma linha horizontal e neste caso, também, existirá reflexão deslizante. No caso desta simetria se verificar mas não existir reflexão horizontal ou nenhuma das duas, o símbolo é um " ***a*** ";

2: → surge, sempre em quarto lugar se o friso manifestar simetria de rotação de grau 2 senão, o quarto símbolo será "***1*** ".

A classificação dos grupos de frisos, segundo esta notação é feita seguindo o seguinte fluxograma:

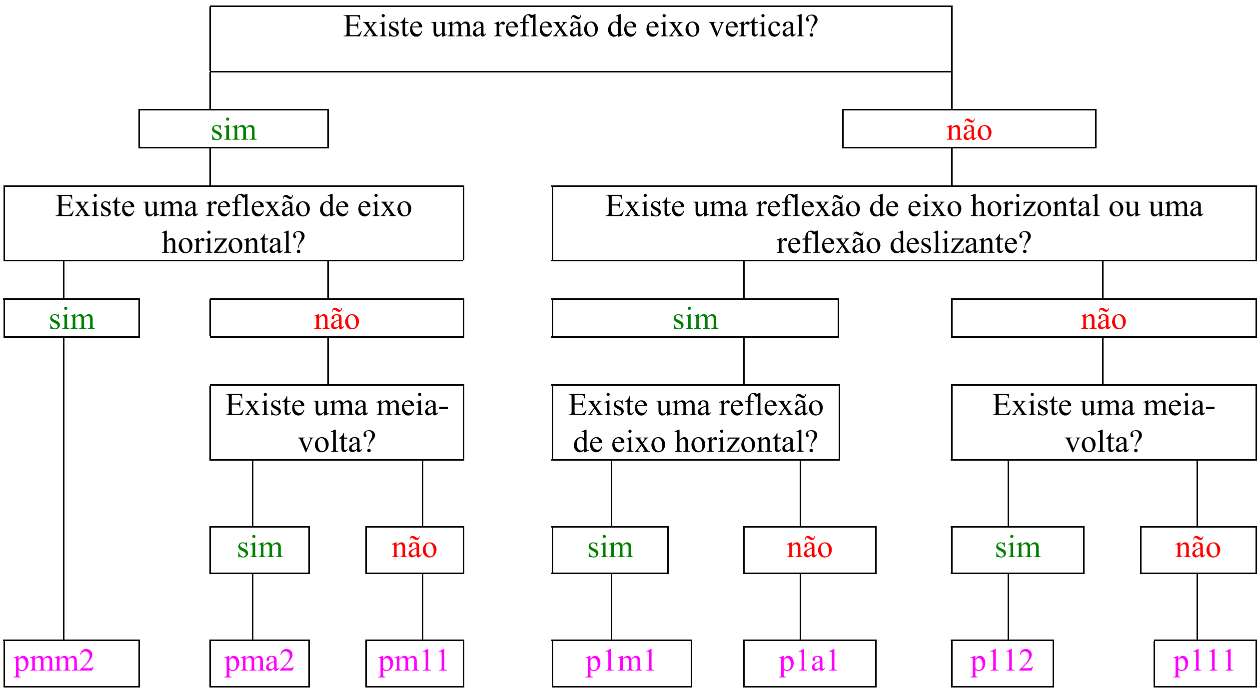


Fig.24: Fluxograma para classificação de Frisos [de Washburn e Crowe]

Outra notação usada é uma versão simplificada de Símbolos internacionais de duas dimensões, como tal é constituído por dois símbolos. O primeiro representa o elemento de simetria perpendicular à direcção da translação e o 2º símbolo representa o elemento de simetria paralela ou perpendicular à direcção da translação (exclusiva para a rotação de grau 2).

Nesta notação utilizam-se as letras ***m*** e ***g*** e os números ***1*** e ***2*** com os seguintes significados:

m: → se for o 1º símbolo, o friso tem simetria vertical;
→ se for o 2º símbolo, o friso tem simetria horizontal;

g: → aparece sempre como 2º símbolo se o friso apresentar simetria de reflexão deslizante;

1: → se for o 1º símbolo, o friso não tem simetria vertical;
→ se for o 2º símbolo, o friso não tem nenhuma simetria, além da indicada pelo 1º símbolo;

2: → aparece sempre como 2º símbolo se o friso tem simetria de rotação de grau 2 (180º).

Seguindo esta notação, a classificação dos grupos de frisos procede-se do seguinte modo:

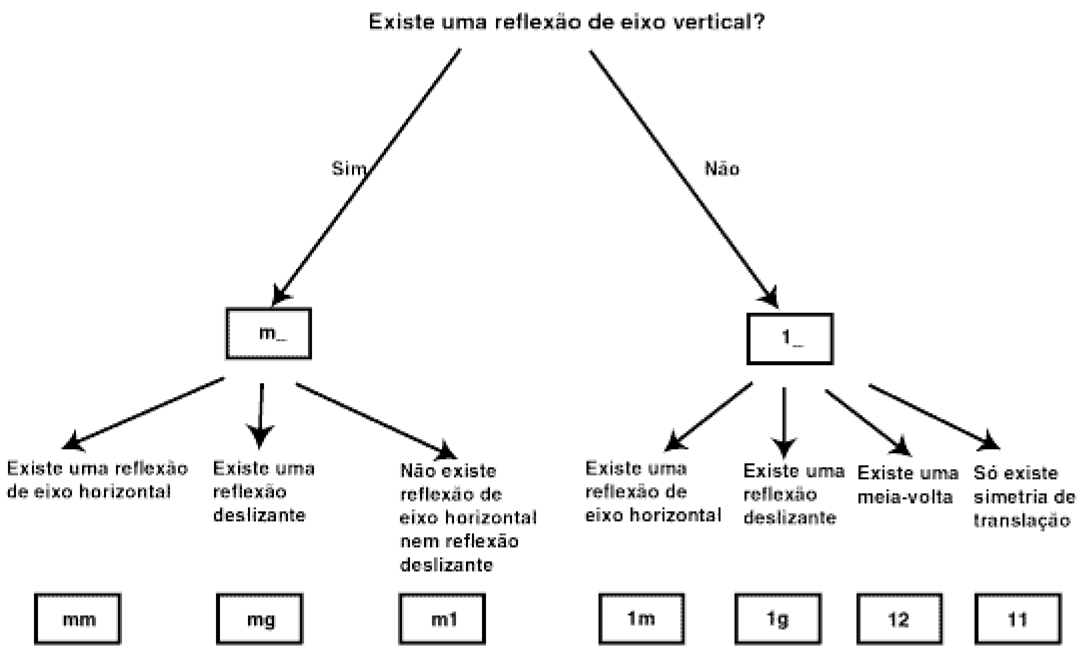


Fig.25: fluxograma (adaptado da APM)

Se utilizarmos o programa Kali depararemos com uma notação que não coincide com nenhuma destas, trata-se da notação “Orbifold” de John Conway. Contudo, podemos estabelecer ligações entre estas notações:

Wasburn e Crowe	Orbifold
pmm2	*2200
pma2	2*00
pm11	*0000
p1m1	00*
p1a1	000
p112	2200
p111	0000

Posteriormente, será feita uma classificação dos frisos existentes nos mosaicos de Conímbriga, onde foram encontrados os sete tipos de grupos de simetria. O programa Kali é extremamente útil para este tipo de investigações, já que elimina possíveis dúvidas na determinação do tipo de grupo a que pertence o friso.

OS SETE GRUPOS DE FRISOS

Para verificarmos que só existem sete tipos de grupos de frisos temos que combinar as possíveis simetrias e verificar se obedecem à definição de friso, caso afirmativo devemos identificar o tipo. O objectivo desta actividade é concluir que qualquer combinação dos movimentos conduz-nos a uma das sete possibilidades ou não poderá constituir um friso.

Notemos que ao identificar uma faixa como sendo um friso, imediatamente, subentendemos a simetria de translação, pelo que na classificação do friso interessa-nos investigar se revela outros tipos de simetria.

- Combinação de uma reflexão vertical com uma reflexão horizontal:

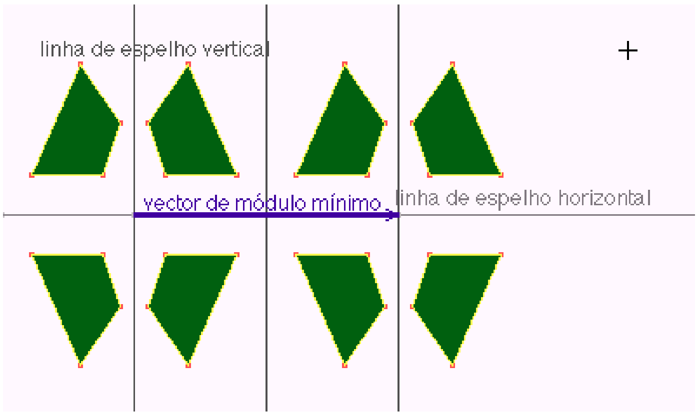


Fig.26

Se aplicarmos a reflexão vertical e horizontal a uma figura obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa verifica estas simetrias e obedece à definição de friso. Para classificar o tipo de friso vamos seguir um dos fluxogramas com a respectiva notação. Dado que o friso revela simetria de reflexão vertical e horizontal, segundo o fluxograma de Washburn e Crowe, ele é do tipo *pmm2*. Notemos que, é indiferente aplicar primeiro a reflexão vertical ou horizontal mas, este facto não ocorre nos outros casos, ou seja, a ordem que se segue na combinação interfere no aspecto final do motivo.

- Combinação de uma reflexão vertical com uma reflexão deslizante:

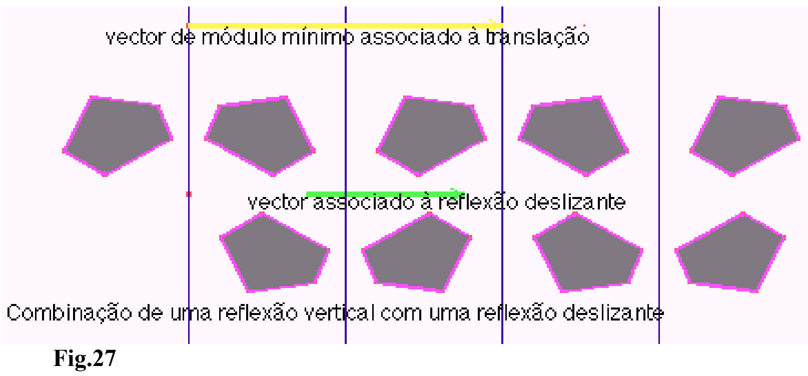


Fig.27

Dada uma figura à qual aplicamos duas reflexões, uma vertical e uma deslizante, obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa forma um friso que revela simetria de reflexão vertical. Segundo a classificação de Washburn e Crowe, o friso é do tipo *pm11*.

- Combinação de uma reflexão vertical com uma rotação:

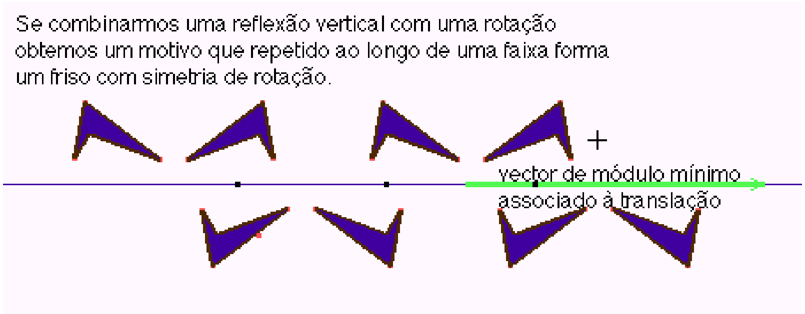


Fig.28

Fig.29

A reflexão vertical pode ser combinada, de dois modos, com uma rotação, na figura 28 verificamos que o centro de rotação encontra-se abaixo da figura enquanto na figura 29 o centro de rotação encontra-se ao lado da figura. Deste modo, obtemos dois frisos com simetria de rotação que embora tenham aparência diferente* são do mesmo tipo, p112.

- Combinação de uma rotação com uma reflexão vertical:

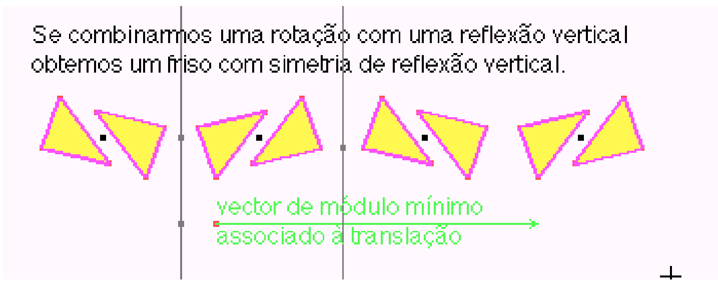


Fig.30

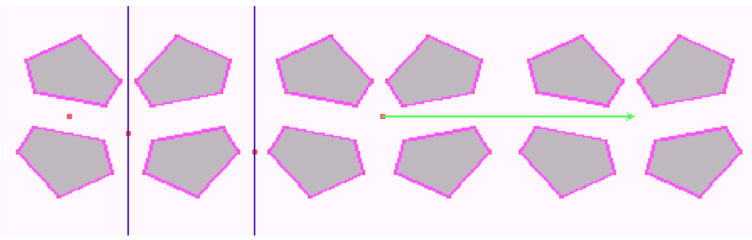


Fig.31

Se a uma figura aplicarmos uma rotação (meia-volta) seguida por uma reflexão vertical obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa constitui um friso com simetria de reflexão vertical. Portanto, o friso pertence ao grupo *pm11*. Notemos que nas figuras 30 e 31 estão contemplados dois casos: ponto central ao lado e por baixo da figura, respectivamente.

- Combinação de uma rotação com uma reflexão horizontal:

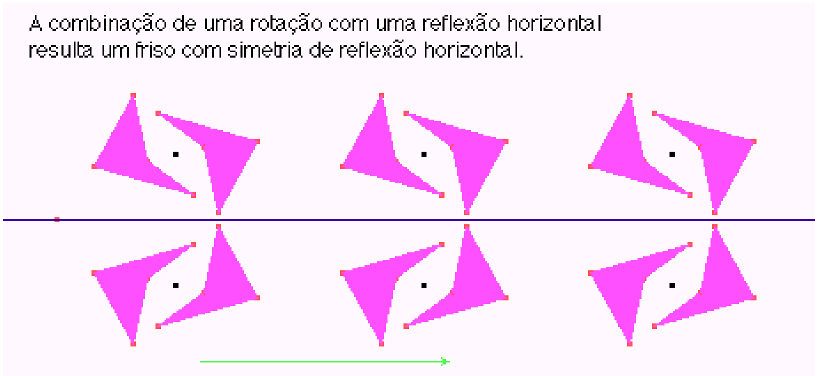


Fig.32

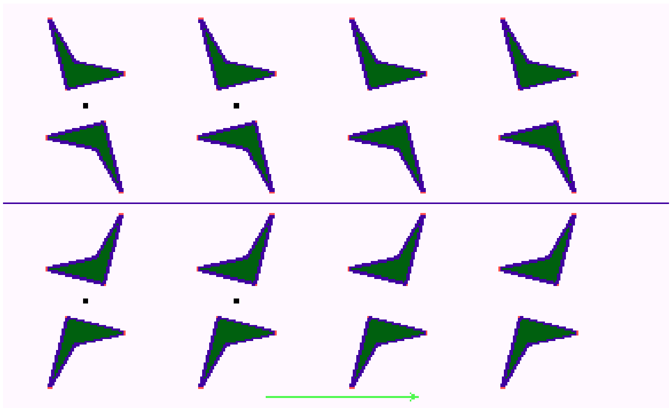


Fig.33

Se aplicarmos numa figura uma rotação seguida por uma reflexão horizontal produzimos um motivo de um friso com simetria de reflexão horizontal, que pertence ao grupo *p1m1*.

- Combinação de uma rotação com uma reflexão deslizante:

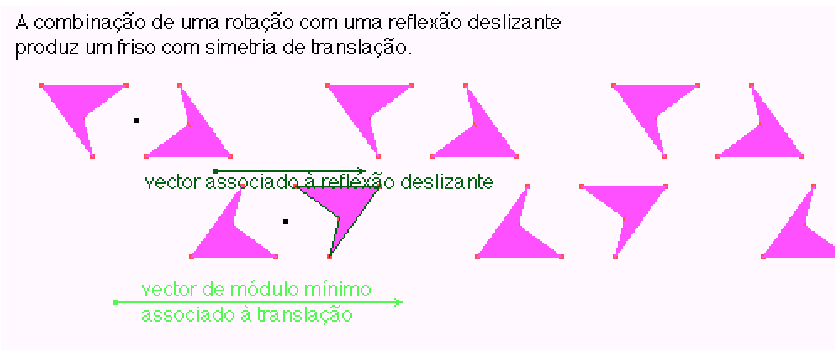


Fig.34

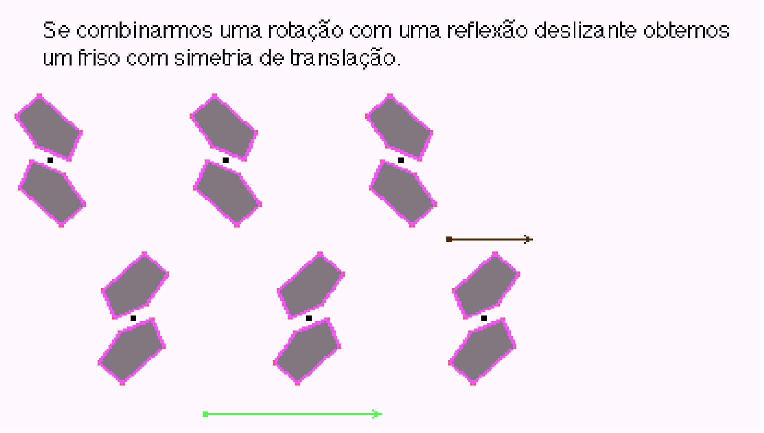


Fig.35

Se combinarmos uma rotação com uma reflexão deslizante obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa forma um friso cuja única simetria é de translação, por isso pertence ao grupo de simetria *p111*.

- Combinação de uma reflexão deslizante com uma rotação:

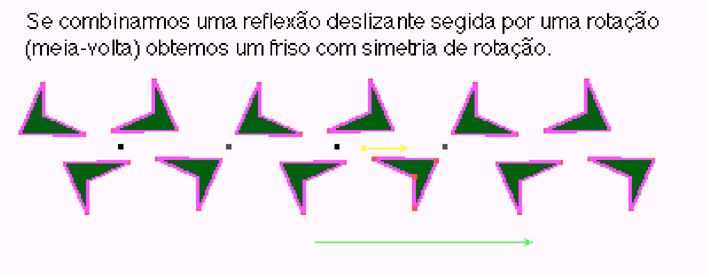


Fig.36

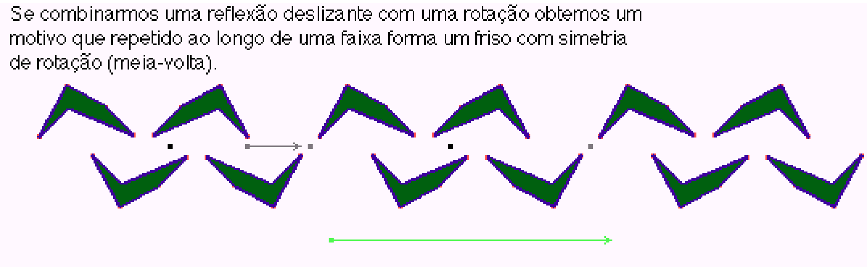


Fig.37

Se aplicarmos a uma figura uma reflexão deslizante seguida por uma rotação obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa constitui um friso com simetria de rotação (meia-volta) logo, pertence ao grupo de simetria *p112*.

* Combinação de uma reflexão deslizante com uma reflexão vertical:

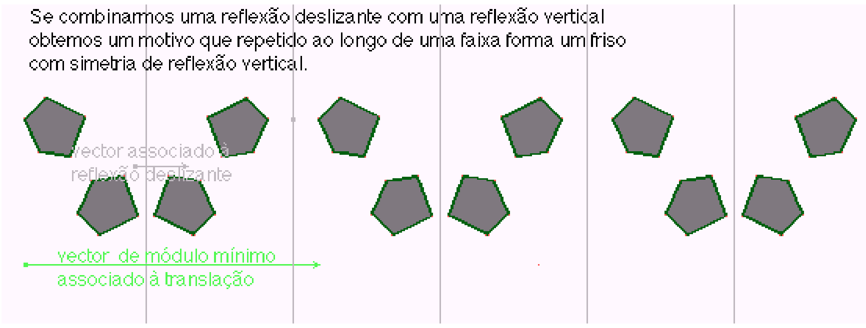


Fig.38

Aplicando uma reflexão deslizante seguida por uma reflexão vertical obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa constitui um friso com simetria de reflexão vertical. Este friso pertence ao grupo de simetria *pm11*.

* Combinação de uma reflexão deslizante com uma reflexão horizontal:

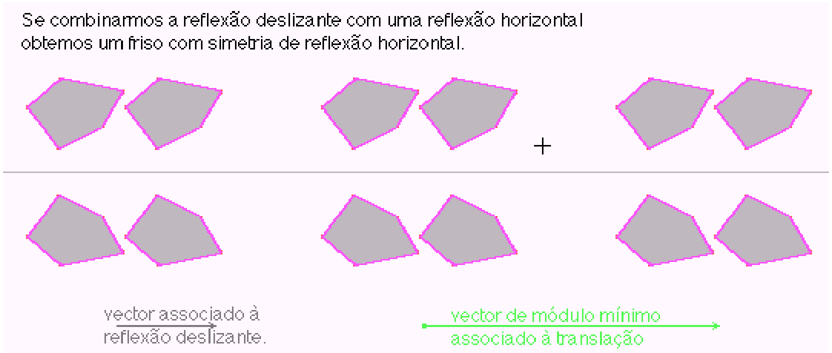


Fig.39

Se aplicarmos a uma figura uma reflexão deslizante seguida de uma horizontal obtemos um motivo que repetido ao longo de uma faixa determina um friso com simetria de reflexão horizontal. O friso é do tipo *p1m1*.

* Combinação de uma reflexão horizontal com uma reflexão deslizante:

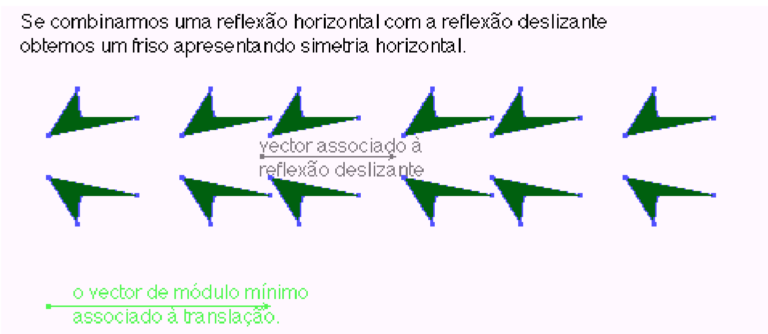


Fig.40

Se procedermos de modo análogo, verificamos que neste caso obtemos um friso com simetria de reflexão horizontal logo, do tipo *p1m1*.

* Combinação de uma reflexão horizontal com uma rotação:

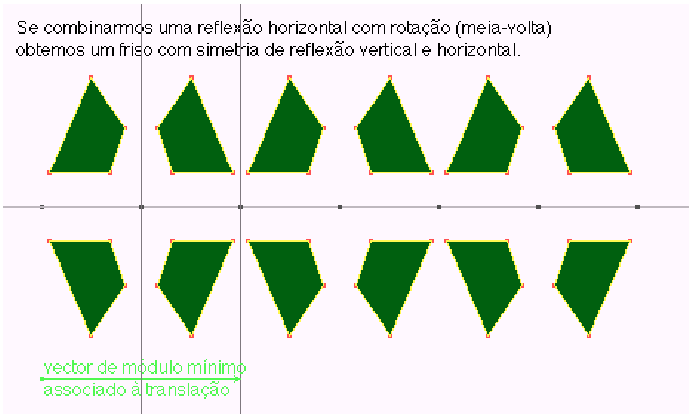
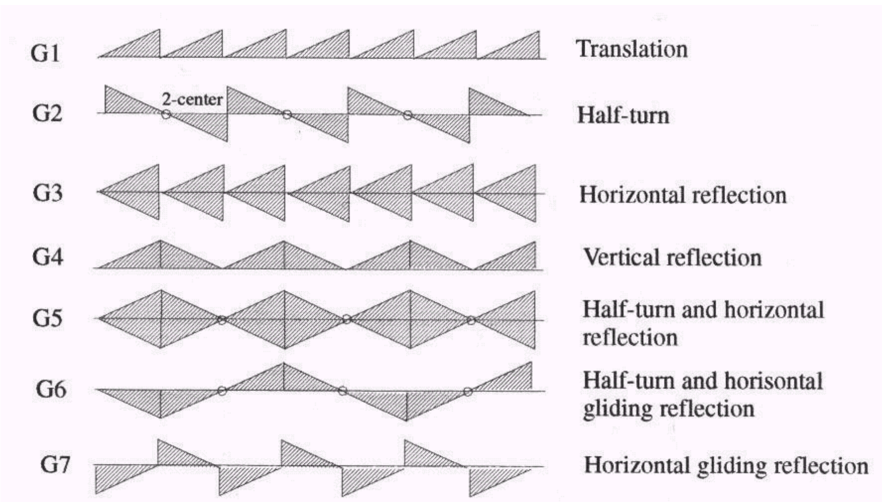


Fig.41

Procedendo de modo idêntico aos casos anteriores verificamos que produzimos um friso com simetria de reflexão vertical e horizontal, pertencente ao grupo de simetria *pmm2*.

A classificação e distinção de frisos é feita de modo mais rigoroso do que aquele que utilizamos nesta secção. Dois frisos são considerados do mesmo tipo se existir um isomorfismo entre os seus grupos de simetria, que faz corresponder translações a translações, rotações a rotações e reflexões a reflexões. Um grupo de simetria de um padrão de faixa é constituído pelos movimentos rígidos que ele verifica. Poder-se-ia demonstrar este resultado com mais rigor recorrendo à teoria de números, álgebra de grupos ou por outros métodos no entanto, necessitávamos de muitos conhecimentos que estão foram do âmbito deste trabalho.



* A existência de, apenas, sete grupos de frisos não considera o aspecto da figura apenas, a forma como se repete e as simetrias que revela.

BIBLIOGRAFIA

LIVROS:

- Veloso, Eduardo (1998), Geometria - Temas Actuais, Instituto de Inovação Educacional, 1ºedição
- Farmer, David W. (1999), Grupos e Simetria, Gradiva - O prazer da matemática, 1º edição
- Grünbaum, Branko e G. C. Shephard (1987), Tilings and Patterns, Freeman, 1º Edição

INTERNET:

- *Symmetry and ornament, Slavik V. Jabla,* http://rattler.cameron.edu/EMIS/monographs/jablan/
- *Frisos,* http://www.apm.pt/apm/aer/frisos.html
- *Fluxograma para a classificação de frisos,* http://www.apm.pt/apm/aer/fluxog.html
- *Border Pattern Gallery, John Wolfe,* http://www.math.okstate.edu/~wolfe/border.html
- *Mathematics and Symmetry,* http://www.ucs.mun.ca/~mathed/Geometry/Transformations/transformations.html
- *Mathematics and Symmetry,* http://forum.swarthmore.edu/mam/95/essay.html
- *Introduction to isometries,* http://www.scienceu.com/library/articles/isometries/index.html
- *Frieze patterns, Alexander Bogomolny,* http://www.cut-the-knot.com/triangle/Frieze.html
- *Kali: Symmetry group,* http://www.scienceu.com/geometry/handson/kali/kali.html
- *Tillings and Tesselations,* http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/index.html
- *Kali,* http://www.geom.umn.edu/java/Kali/program.html