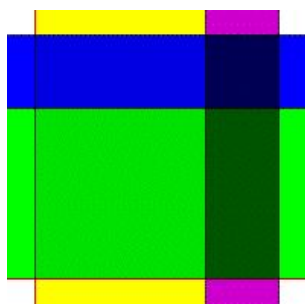


Sobre a álgebra geométrica

O regresso à história.

Arsélio Martins

Aveiro, Novembro de 2002



A ideia

José Miguel Sousa escreveu: "O raciocínio matemático dos gregos baseava-se, quase unicamente, nas formas e figuras geométricas. Um segmento de recta representava também o seu próprio comprimento; o produto de dois segmentos de recta representava uma área rectangular; o produto de três segmentos de recta representava um volume paralelepédico. Isto é, efectuavam as operações aritméticas através das construções geométricas, por exemplo, se x e y representavam dois segmentos, então xy era a área do rectângulo de lados x e y ." Assim, visto que os matemáticos na Grécia Antiga utilizavam figuras geométricas simples e as respectivas áreas, é costume falar-se na lgebra Geométrica dos Gregos.

No programa de Matemática para o 8º ano do ensino básico, um dos conteúdos do tema equações refere-se aos casos notáveis da multiplicação de binómios. Em alguns manuais escolares encontramos uma apenas uma "interpretação geométrica destes resultados", isto é, uma "imagem" de um resultado algébrico. É usual ouvirmos os professores de matemática, a leccionar turmas do ensino secundário, dizerem: "os meus alunos não sabem os casos notáveis da multiplicação". Será que a História da Matemática (álgebra geométrica dos gregos) não poderá contribuir para um melhor ensino/aprendizagem destes conteúdos?

Considere o caso específico do desenvolvimento do quadrado de uma soma:

i) Procure nos *Elementos de Elucides* a proposição que lhe corresponde;

ii) Será possível leccionar este conteúdo à luz da *História da Matemática*? Se sim (eu acredito que sim!), elabore uma actividade para desenvolver, na sala de aula, com alunos aquando da leccionação do conteúdo acima especificado. Não se esqueça que o "pano de fundo" deverá ser a *História da Matemática*.

Este texto levanta algumas interrogações, mas principalmente sugere que se reflecta sobre o que é ensinar Matemática utilizando a sua história. É o que tentaremos fazer.

1 Não é de agora . . . Como foi?

Ouve-se dizer que os estudantes não sabem os casos notáveis, que não sabem multiplicar polinómios, etc. Para além de sabermos que os professores introduzem esses temas usando as propriedades das operações (estruturas algébricas) e ilustrações geométricas simples, sabemos todos que não é por falta de insistência dos professores em exercícios de cálculo e de aplicação das fórmulas que acabaram por resumir a leccionação. De certo modo, estamos tentados a considerar que os exercícios de cálculo em excesso não resolvem o problema da aprendizagem do cálculo. E podemos mesmo colocar a questão de saber se o melhor caminho é fazer a leccionação a partir das propriedades das operações abstractas sobre números e letras com ilustrações geométricas. Que nos diz a história?

António Sérgio escrevia ¹ na década de 50: *Na instrução secundária, algumas vantagens se tiraria, suponho eu, de uma mais pedagógica redacção dos programas. Cumpriria, ao que julgo:*

a) *Redigir os programas de maneira tal que permitissem ao professor o salientar no ensino a ordem e a estrutura da investigação científica;*
(...)

Nos programas que temos tido, não se vislumbra o menor intuito de bosquejar a própria investigação científica, a actividade criadora de onde o saber provém.

Segue esta, como se sabe, a marcha analítica ou regressiva, que vai do perceptual para o formal, dos efeitos para as condições, das con-

¹António Sérgio, *Paideia*(Sugestões e conselhos de há mais de trinta anos), Ensaios Tomo VII (pp 290-293), Publicações Europa-América, Lisboa: 1954

sequências para os seus princípios, dos fenómenos para as suas leis. Os cientistas, ao descobrir a ciência (que é principalmente inventar a ciência); ao realizar a investigação, — observam os fenómenos da Natureza: primeiro passo; conjecturam depois (segundo passo) hipóteses explicativas; depois(terceiro passo) fantasiavam experimentações, — que confirmem, ou que infirmem, as hipóteses fantasiadas; depois, a hipótese não infirmada é admitida (provisoriamente) como uma lei; e, enfim, aperfeiçoam-se as definições (último passo) dos conceitos necessário ao enunciado das leis.

Em resumo: primeiro, observação dos factos; depois, a hipótese; depois, a concepção da experimentação; depois, a realização da experimentação; depois, a definição mais precisa dos conceitos, consoante o permita o saber do tempo. É o método analítico, regressivo, que vai do efeito (andando para trás) às condições que o trouxeram. É o método da descoberta, da criação da ciência; é o método que o professor não deverá esquecer, e em que lhe cumpre iniciar os seus alunos.

Ora construída a teoria, passa o sábio a um segundo trabalho, que é comunicá-la a todos nós, expondo-a para isso num tratado. Agora, porém, segue outra marcha, que é a inversa do processo anterior. Começa agora pelas definições; enuncia, depois as leis; e, dessas leis é que ao presente deduz, como consequências os factos que vemos (ou que ele começou por ver) e que o tinham levado à investigação respectiva. É a marcha sintética, a dedutiva, ou progressiva, que vai dos princípios — andando para diante — às suas consequências.

É a marcha que se vê nos compêndios, a única para que os programas inclinam o mestre. Ora, convém redigir os programas de ensino de maneira a não desprezar a história da ciência e a exposição da marcha da investigação científica. (...)

Não resisti a transcrever esta longa citação, por ser rico de implicações o que A. Sérgio pensava sobre o ensino das ciências (mal conhecido), mas principalmente por nos chamar a atenção para a forma como os registos escondem o processo da descoberta e como os programas e os compêndios são também discursos de síntese. A síntese é necessária, mas quando não funciona na aprendizagem pode ser que o ensino precise de ser preparado para permitir ao estudante percorrer a história ou pelo menos parte do caminho da humanidade, isto é, deixar que a passada dos jovens seja ao menos guiada pelas pégadas deixadas na história (que são em si sínteses provisórias).

Os *Elementos* de Euclides constituem uma síntese para o conhecimento matemático permitido ao tempo. Mas como síntese indicam que o caminho seguido para a álgebra pode começar pela geometria e que, no princípio, ao contrário da síntese actual, a base era a geometria (também da álgebra).

2 A sugestão da história

Os professores, sem o referirem (sem o saberem?) utilizam as figuras da história para ilustrar o caso notável da multiplicação. O que estamos a sugerir agora é que, não só se situem as figuras no seu contexto histórico, mas que se utilize a história e a geometria como base do ensino da álgebra no ensino básico e não como simples ilustração.

Reescrevo na grafia actual, um trecho de Fernando de Vasconcellos² sobre o que terá sido o caminho trilhado:

(...) As investigações sobre a teoria dos números foram, de começo, a continuação da numeração mística dos Babilónios; e a sentença de Pitágoras — as coisas são números — tem de ser anterior ao descobrimento das quantidades incomensuráveis e dos números irracionais, porque o seu significado compreende, realmente, apenas os números inteiros³, ou, pelo menos, traduz relações entre grandezas geométricas que, por isso mesmo, devem ser comensuráveis⁴. Porém, o tratamento das grandezas incomensuráveis, por um lado, e, por outro, a resolução aritmética

²Vasconcellos, F.A.; História das Matemáticas na Antiguidade; Aillaud e Bertrand, Lisboa:1927

³Para os gregos, o significado de número refere-se aos números da série numérica natural. Modernamente, o sábio alemão Leopold Kronecker (1832-1891) com a sua célebre frase: "os números inteiros foram criados por Deus; os outros são obra do homem" — pretendia reduzir tudo nas matemáticas à teoria dos números inteiros. - nota da obra citada

⁴Os pitagóricos — como o mostram suficientemente, ao que parece, os seus trabalhos sobre a figuração dos números e a sua célebre definição do ponto (a unidade tendo uma posição) — partiram da ideia, natural a todo o homem não instruído, que todo o comprimento é necessariamente comensurável com a unidade. A descoberta da incomensurabilidade de certos comprimentos entre si, e notoriamente da diagonal do quadrado do lado, quer seja devida ao Mestre, quer aos discípulos devia ter produzido, desde então, um verdadeiro escândalo lógico, uma temível pedra de escândalo.

"É a verdade que é difícil destruir, mas o erro que leva tempo a destruir; a incomensurabilidade estava, em todo o caso, em contradição formal com os princípios da teoria das relações estabelecidas então só para os números, e toda a demonstração fundada sobre a semelhança ou empregando a noção de relação ficava assim submetida a sérias objecções. Se houve na Escola Pitagórica, mistérios reservados só aos iniciados, a incomensurabilidade devia pois ser um deles; ela devia, sem dúvida estar descoberta desde há mais de um século, quando Platão apresentou a sua revelação, como nova, no seu tempo. Como consequência, os géometras procuraram evitar esta grave questão, banindo a noção de relação de todas as demonstrações em que a mesma não fosse absolutamente necessária. Eudoxio, por fim, ao retomar esta noção conseguiu modificá-la de modo a estender a teoria, tão rigorosamente às quantidades incomensuráveis, como às quantidades comensuráveis. Euclides, mais tarde, ao redigir os Elementos, conservou a ordem histórica relativa à forma das demonstrações" . (Mém. sc. de P. Tannery, 1^o vol, p. 28) - Nota da obra citada

das equações numéricas do 2º grau ⁵, que imediatamente seguiu, se não precedeu mesmo a sua solução geométrica ⁶, fez perceber aos Pitagóricos (e este é o seu grande merecimento) a insuficiência da representação numérica das quantidades — dificuldade que eles suprimiram, pela imagem geométrica da grandeza, em geral, e operações sobre figuras, em que os pontos representam uma grandeza muito geral, racional ou irracional, sobre a qual é possível conjecturar.

Com esta forma de representação geométrica das grandezas, fácil era proceder à adição e à subtração dos segmentos respectivos. Pelo que respeita à multiplicação, os Gregos sabiam, à semelhança dos Egípcios, que, tomando como unidade de superfície o quadrado construído sobre a unidade de comprimento, a superfície de um rectângulo tem por expressão o produto dos seus lados, quando estes figuram números inteiros, ou, pelo menos, grandezas comensuráveis.. Conheciam, deste modo, a representação geométrica dum produto de dois números inteiros e podiam falar, indiferentemente, por exemplo, do produto dos dois números 3 e 4 ou do rectângulo formado pelos segmentos que figuram os dois factores 3 e 4 que, abreviadamente, podiam designar pelo rectângulo de 3 por 4; ou, ainda, falar do produto de 3 por 3 ou do quadrado de 3, o que, como dissemos, levou à consideração dos números planos e trouxe, em especial, à designação de números quadrados, ainda hoje em uso.

Os Pitagóricos, tendo reconhecido que era impossível evitar nas investigações de ordem geral as grandezas irracionais (grandezas incomensuráveis com a unidade empregada), mas sentindo-se incapazes de alargar o conceito aritmético de multiplicação e produto, no sentido imediato da palavra ⁷, applicaram às grandezas gerais

⁵Pela perda das obras da Logística grega, só em Herão e em Diofanto se encontram alguns dados precisos sobre a forma como era obtida a solução aritmética dos problemas do 2º grau. - Nota da obra citada

⁶O cálculo real com números racionais deve ter servido de tipo aos Gregos para o seu método de cálculo geométrico, por meio do qual eles vieram a tratar as quantidades irracionais, tendo em vista as mesmas operações⁷. Ora o que importava entretanto, era que as devidas considerações a este respeito fossem expressamente postas em relevo; isto, porém, só se realizou muito tarde, sendo o notável matemático árabe Alkarchi quem na sua Aritmética publicada em Bagdad, próximo do ano 1000 — fazendo acompanhar cada uma das regras de cálculo por exemplos, com o fim de mostrar que essas regras derivam dos próprios cálculos — nota expressamente, "que para a inteligência das regras algébricas é necessário preparar-se com as regras gerais da aritmética que ele tinha dado em obra anterior (Zeuthen, ob.cit., p. 259) - Nota da obra citada

⁷De lógica menos rigorosa, mas muito mais práticos sob o ponto de vista do cálculo numérico do que os Gregos, os ndios applicaram aos números irracionais as regras de cálculo dos núemros racionais e, em lugar das transformações geométricas que se encontram em Euclides, faziam o cálculo directo daqueles números. É certo, todavia, que só a partir do século V. d. J. C., isto é, muitos séculos depois de serem conhecidos os trabalhos dos grandes géometras helenos, que exerceram incontestada e extraordinária influência na matemática dos ndios, esta começa a contar — mas logo duma forma excep-

a representação geométrica em rectângulos e em quadrados, do produto de dois números inteiros; e chamavam a ab o rectângulo formado por a e por b , e a a^2 chamavam o quadrado de a .

Criaram, por esta forma, uma nova representação geométrica de grandezas — a representação por meio de superfícies — cujo estudo e teoria constituem a parte das Matemáticas gregas a que Zeuthen chama lgebra geométrica, porque, conforme comenta, "do mesmo modo que uma letra em álgebra, a representação duma grandeza pelo comprimento pode aplicar-se a grandezas que variam de uma maneira contínua". Além — continua o ilustre matemático — não conhecendo os Gregos as quantidades negativas, "as variações das figuras podiam apresentar, em parte, as mesmas generalizações que hoje se otêm com as referidas quantidades", e pode, com facilidade, reconhecer-se que as operações sobre as quantidades representadas geometricamente desempenham papel semelhante ao das nossas operações algébricas.

"A lgebra geométrica ⁸, tanto em Euclides como em outros autores, é a base de tantas investigações, que esta frequência constitui por si mesmo uma prova da alta antiguidade que lhe podemos atribuir, de acordo com aquilo que nos é referido da noção pitagórica da aplicação das superfícies; e a sua fácil aplicação a quaisquer grandezas racionais e irracionais, e, conseqüentemente, a sua natureza abstracta convém perfeitamente ao que Eudémio diz da maneira como Pitágoras tratava a Geometria — imaterialmente.

É muito possível que este carácter abstracto não tenha sido de começo tão notório e tão acentuado, como o foi no tempo de Eudémio e como já o era em Euclides. É natural, pelo contrário, admitir — e isso está inteiramente de acordo com o que nos dizem da ligação operada pelo Pitagóricos, da Geometria e da Aritmética — que a tradução geométrica correspondente aos números inteiros, que, em Euclides, aparece como uma aplicação da lgebra geométrica, fosse anterior a esta lgebra.

Nas representações geométricas das propriedades dos números inteiros, pelos quais se começou, achou-se sucessivamente uma forma de representação, que, com muita facilidade, se applicava, geral-

cional e brilhante — no desenvolvimento da nossa ciência.

Pelo que respeita aos rabes, é notável com Ilkarchi, ilustre matemático de Bagdad, e Omar Alkhaijámi (séc. XI), ambos muito embora anteriormente familiarizados com as estritas concepções dos Gregos, mostram como se pode calcular com os radicais irracionais, multiplicando-os e dividindo-os, qualquer que seja a sua potência, somando-os e subtraindo-os, quando as potências são números semelhantes — planos ou sólidos. Acrescentemos que é só em Chuquet, no seu excelente Tratado de Aritmética e lgebra intitulado Triparty en la science des nombres (1484) que se encontra o mais antigo uso do sinal radical com índices para indicar a extracção de raízes; tendo sido o copista alemão Rudolf quem introduziu o sinal $\sqrt{\quad}$ corrupção da letra inicial da palavra radix para indicar a raiz quadrada. - Nota da obra citada

⁸Zeuthen, ob. citada) - Nota da obra citada

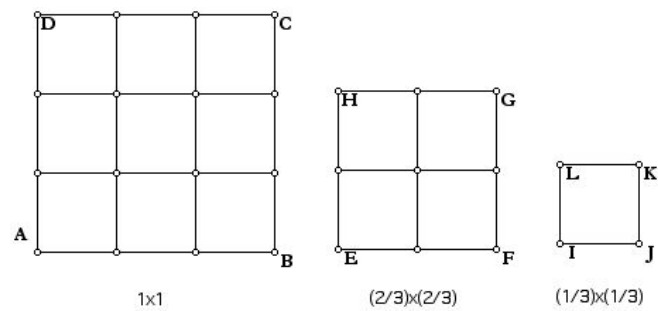
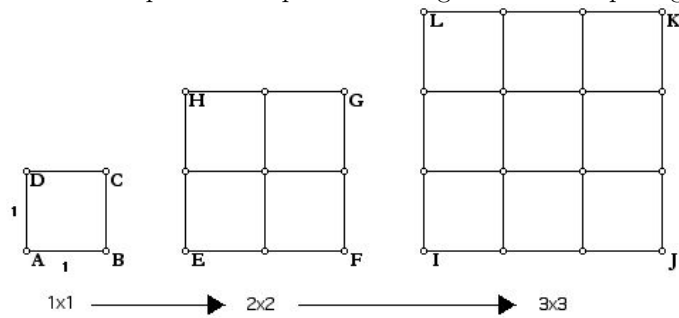
mente, por si mesma a grandezas contínuas, sendo, todavia muito provável que só com o tempo isso fosse percebido”.

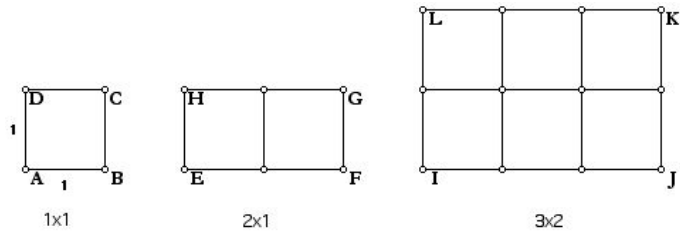
2.1 Da geometria para a álgebra

Não pode acontecer que os estudantes do ensino básico tenham dificuldade em compreender e trabalhar com operações sobre as letras a partir das propriedades operatórias de estrutura abstracta? E não é natural que possam compreender bem as operações se passarem pelas representações de grandezas contínuas a que conferem significado concreto ou vivido?

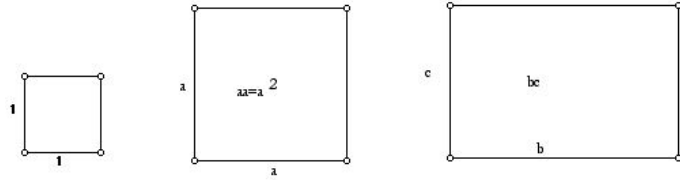
Podem pelo menos experimentar-se a sua compreensão sobre os comprimentos, as áreas e os volumes. Se verificarmos que há ganhos de compreensão e aceitação, não podemos introduzir os cálculos sobre letras a partir das figuras?

Aos estudantes podem ser apresentadas figuras como as que seguem:

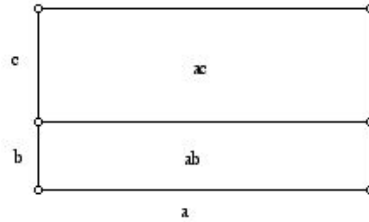




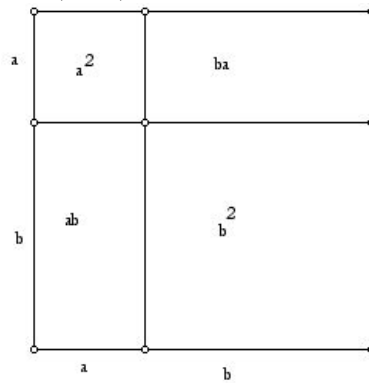
para aceitarem



e



para aceitarem que $a(b + c) = ab + ac$, ou



para aceitarem que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, etc, etc.

E é claro, para nós, que qualquer que seja o processo para colocar os estudantes a trabalhar sobre a álgebra geométrica, tem um interesse verdadeiro e ampliador da compreensão mostrar e elucidar a fonte histórica, sendo de particular interesse dar acesso aos

enunciados dos Elementos e ao pensamento presente nas demonstrações. Por exemplo, a proposição II.4: "Se uma recta é cortada à vontade, o quadrado da recta inteira é igual aos quadrados dos segmentos e a duas vezes o rectângulo contido sob os dois segmentos" ⁹. Penso que a "resolução de equações quadráticas sob uma forma geométrica" bem como o teorema do quadrado da hipotenusa, abordada na forma clássica, também seria bem formativa (no 8º ou 9º ano de escolaridade, em ambiente de sala de aula ou trabalho independente).

3 O poder da geometria. . .

Para dar uma ideia da importância da geometria em geral e dos seus aspectos formativos, deixo aqui parte do que Jean Pierre Petit escreveu para a banda desenhada sobre a Teoria da Relatividade:

No seguimento de uma viagem de estudo pelo "cosmol" com o Senhor Alberto, Lanturlu vê-se projectado no mundo da geometria. Como no caso do Geometricon, aconselha-se vivamente o leitor a munir-se do mesmo material e a fazer de novo as experiências geométricas feitas por Anselmo, isto é a fabricar os "posicones" e os "negacones". Neste álbum álbum, discorre-se sobre a curvatura e a sua medida angular. Pólos, malhas, passa-se tudo lá, mas sempre de um modo acessível. Considerando a vizinhança do sol (ou de um corpo compacto e denso) como um cone, Lanturlu descobre a ideia-chave do Senhor Alberto: substituir as trajectórias "newtonianas" de objectos que se deslocam num espaço plano e sujeitos a acções à distância de outras massas, por geodésicas de um espaço curvo. Deste modo desaparecem as massas e nada mais há além de geometria. Sob este ponto de vista, o álbum é uma boa apresentação do conceito-chave da Relatividade Geral: matéria=geometria.

Gostei desta. Os estudantes não perdiam nada em ler as bandas desenhadas "As aventuras de Anselmo Curioso", em particular aquelas que tratam das geometrias (há publicações da D. Quixote, se não me falha a memória). O poder da geometria é imenso.

Arsélio Martins,
Aveiro, Novembro de 2002

⁹Enunciado transcrito da obra citada de F. Vasconcelos. Não é bonito?