7. Em $\mathbb{C}$, uma condição que pode representar a bissectriz dos quadrantes pares no plano complexo é:

(A) $|z-1| = |z-i|$ **(B)** $|z+1| = |z-i|$ **(C)** $\operatorname{Re}(i) = \operatorname{Im}(z)$ **(D)** $\operatorname{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$

8. Indique um argumento do número complexo $\frac{5}{3i^{34}}$

(A) 0 **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** π **(D)** $\frac{3\pi}{2}$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam w_1 e w_2 dois números complexos tais que:

- ambos são raízes consecutivas de índice 8 de um certo número complexo;
- $w_1 = 2\sqrt{3} + 2\,i$;
- A imagem geométrica de w_2 está no quarto quadrante.

1.1. **Sem usar a calculadora**, justifique que $\frac{23\pi}{12}$ é um argumento de w_2 e determine o seu módulo.

1.2. Represente graficamente a região do plano seguinte e determine a sua área.

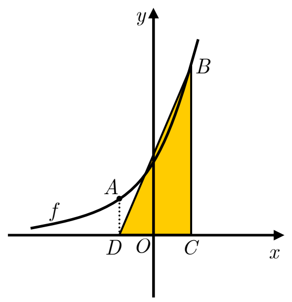
$$\operatorname{Arg}(w_2) \le \operatorname{Arg}(z) \le \operatorname{Arg}(w_1) \quad \wedge \quad |z| \le 4$$

4. Considere uma função h, derivável em $\mathbb{R}$ e tal que $h(3) = 2$ e $\lim_{x\to 3} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} = 1$.

Então, podemos concluir que:

(A) $\lim_{x\to 3} h(x) = 1$ **(B)** $\lim_{x\to 3} h(x) = 2$ **(C)** $h'(3) = 2$ **(D)** $h'(3) = 0$

5. No referencial da figura ao lado está o triângulo $[BCD]$ e parte do gráfico da função f.



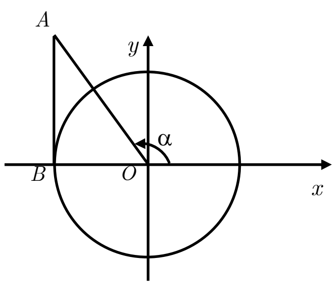
Sabe-se que:

- $f(x) = 5^x$;
- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f;
- as abcissas dos pontos A e D são iguais;
- a ordenada do ponto A é igual a $\frac{1}{2}$;
- as abcissas dos pontos B e C são iguais a $\frac{1}{2}$.

Qual é o valor da área do triângulo $[BCD]$?

(A) $\frac{5\left(\log_2 5+0{,}5\right)}{2}$ **(B)** $\frac{\left(\log_5 2+0{,}5\right)\sqrt{5}}{2}$ **(C)** $\frac{5(\ln 2+0{,}5)}{2}$ **(D)** $\frac{(\ln 5+0{,}5)\sqrt{5}}{2}$

6. Considere o triângulo rectângulo ABO no círculo trigonométrico ao lado em que se sabe que:



- α é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirecta $\dot{O}A$;
- $\overline{OA} = \sqrt{3}$.

Qual é o valor de $\operatorname{tg}\alpha$?

(A) $1{,}2$ **(B)** $-1{,}4$ **(C)** $-\sqrt{3}$ **(D)** $-\sqrt{2}$

3. Seja $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ e considere todos os números com **quatro** algarismos que se podem escrever com quaisquer algarismos de A.

3.1. Ao escolher um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter os quatro algarismos todos diferentes?

3.2. Ao escolher um desses números de quatro algarismos ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser um número par **sabendo que** representa um número inferior a 4000?

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

5. Introduziram-se, num determinado momento, alguns milhares de bactérias numa cultura. Admita que, t horas depois, o número de bactérias (em milhares) existentes na cultura é dado aproximadamente por

$$b(t) = \frac{15}{1+3e^{-0,2t}}$$

Nota: nos dois itens seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

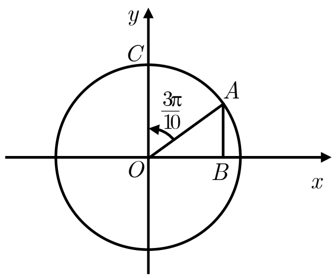
5.1. Desde que foram introduzidas e até passar exactamente um dia inteiro, de quanto foi o aumento de bactérias? Apresente o resultado em milhares de bactérias arredondado às décimas.

5.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, após quantas horas o número de bactérias será igual a 13 milhares?

Apresente o resultado em horas, arredondado às décimas.

6. No círculo trigonométrico da figura está representado o ângulo de amplitude $\frac{3\pi}{10}$, que tem por lado origem o segmento de recta $[OA]$ e por lado extremidade o semieixo positivo Oy.



Tal como a figura sugere:

- $[OA]$ é um raio do círculo;
- B é um ponto do semieixo positivo Ox;
- o ângulo OBA é recto.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, de $\overline{AB}$?

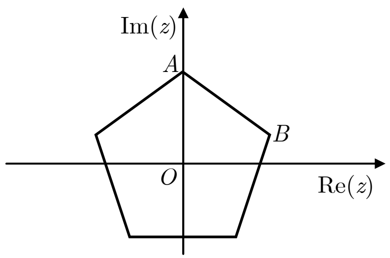
(A) $0,81$ **(B)** $0,75$ **(C)** $0,63$ **(D)** $0,59$

7. Um número complexo z tem a sua imagem geométrica no segundo quadrante no plano complexo. Sendo $\overline{z}$ o conjugado de z, a imagem geométrica do número $\overline{z} - z$ pertence ao:

(A) semieixo positivo Ox **(B)** semieixo negativo Ox

(C) semieixo positivo Oy **(D)** semieixo negativo Oy

8. Na figura está representado um pentágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 5 de um certo número complexo.
Os pontos A e B pertencem a esse pentágono;
O ponto A pertence ao eixo Oy;
O ponto B pertence primeiro quadrante.



Qual dos seguintes números complexos pode ter por imagem geométrica o vértice B?

(A) $\text{cis}\,\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\text{cis}\,\frac{\pi}{7}$ **(C)** $\text{cis}\,\frac{\pi}{10}$ **(D)** $\text{cis}\,\frac{\pi}{12}$

5. É dada a função h , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$, definida por $h(x) = \frac{e^x}{x+4}$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

5.1. Mostre que $h(\ln 16) = \frac{4}{\ln 2+1}$

5.2. Verifique que a função h tem apenas um mínimo e determine-o.

6. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x^2+8000}$.

Prove que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assimptota do gráfico de f .

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 1 - 5\cos(2x)$

Seja α um número tal que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \wedge \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{5}{13}$

Determine, sem usar a calculadora, $g(\alpha)$.

FIM

RESOLUÇÃO DA PROVA MODELO 26

Grupo I (8 × 5 pontos)

1	2	3	4	5	6	7	8
D	**D**	**B**	**D**	**D**	**A**	**C**	**B**

Justificações

1. $P(6 < X < 6,5) \approx 0,34$, pelo que $P(6 < X < 6,2) < 0,4$

2. Há 5 vogais, 18 consoantes e 50 n.ºs pares. Como a vogal pode ficar num dos 3 primeiros lugares, logo n.º total = $5 \times 18^2 \times 3 \times 50$

3. $P(A) = 1 - \frac{^{12}C_5}{^{6}C_2} \approx 0,9997$

$P(B) = \frac{^{12}C_3 \times {^{4}C_2}}{^{52}C_5} \approx 0,0005$

$\therefore P(\bar{B}) \approx 0,9995$

$P(C) = \frac{12 \times {^{40}C_4}}{^{52}C_5} \approx 0,422$

$\therefore P(\bar{B}) \approx 0,578$

4. $g'(x) = (x \ln 4)' = \ln 4$

5. $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \frac{1}{3} \neq 3 = h(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \frac{1}{3} \neq 3 = h(0)$

6. O lado do quadrado é igual a tgx pelo que o raio do círculo é $\frac{tgx}{2}$;

$\therefore$ área pedida = $tg^2 x - \pi(\frac{tgx}{2})^2 = tg^2 x - \frac{\pi tg^2 x}{4}$

7. $z_1 = \rho cis\theta$;

$\frac{z_1}{z_2} = \rho cis(\theta - \frac{\pi}{10})$

Se $\frac{z_1}{z_2}$ é imaginário puro, logo

$\theta - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{5} + k\pi$

Se $k = 1$, $\theta = \frac{8\pi}{5}$

8. (C) e (D) não podem ser porque o triângulo tem de ser equilátero. Todos os n.ºs *a –ai* têm o mesmo argumento, ie, $-\frac{\pi}{4}$. Assim, fazendo *a* = 1, uma raiz cúbica de *z* é $\sqrt[3]{\sqrt{2}}cis\frac{-\pi/4}{3} = \sqrt[6]{2}cis(-\frac{\pi}{12})$ cujo argumento está no IV Q

Grupo II

1.1...15 **pontos**

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-20+4i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$ 2

$= -4 - 4i$ 7

$z^2 - 2z = (-4 - 4i)^2 - 2(-4 - 4i)$ ..2

$= 8 + 40i$ 3

Conclusão..1

1.2...15 **pontos**

Esboço do ponto *A*..........3

Esboço do ponto *A*..........4

Esboço do Δ....................1

Perímetro = $6 + 2\left|\bar{z}_1\right|$ ...1

$= 6 + 2\sqrt{13}$ 6