

PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA (Resumo Teórico)

Experiências Aleatórias

Experiência aleatória: é uma experiência em que não se consegue prever o resultado.

Espaço de Resultados ou Espaço Amostral (conjunto Ω): conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória.

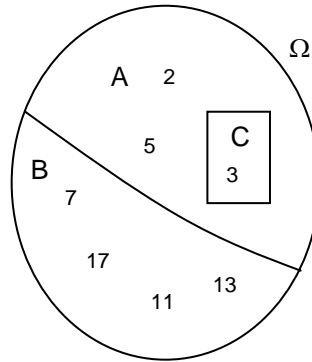
Acontecimento Elementar: acontecimento associado a um conjunto com um só elemento (ex: C).

Acontecimento Certo: acontecimento que ocorre sempre, ie, Ω .

Acontecimento Impossível: quando o conjunto associado não tem elementos, ie, \emptyset .

A e B são Acontecimentos Contrários porque se tem $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$.

B e C são Acontecimentos Incompatíveis porque se tem $B \cap C = \emptyset$, ie, nunca ocorrem ao mesmo tempo.



Lei de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favoráveis ao acontecimento A}}{\text{n}^\circ \text{ de casos possíveis}}$$

Definição axiomática de probabilidades (Andrei Kolmogorov)

Axioma 1 $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega$

Axioma 2 $P(\Omega) = 1$

Axioma 3 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A e B incompatíveis

Primeiras Leis de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Algumas Propriedades Elementares das probabilidades

$P(\emptyset) = 0$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (acontecimento contrário)

$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subset \Omega$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \subset \Omega$
(reunião de acontecimentos)

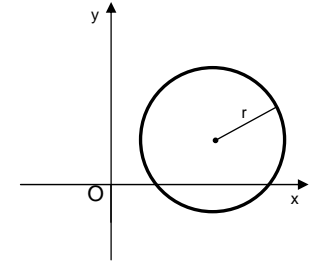
Probabilidade Condicionada: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ probabilidade de A dado que ocorreu B

A e B são Acontecimentos Independentes $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

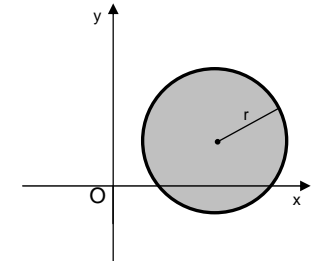
B não tem qualquer influência

Domínios Planos e condições em variável complexa

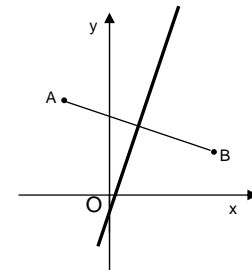
$|z - z_1| = r$ representa todos os pontos P(x,y) do plano (imagens geométricas de z) cuja distância à imagem geométrica de z_1 é igual a um determinado número positivo r (circunferência)



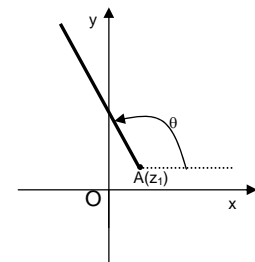
$|z - z_1| \leq r$ representa todos os pontos P(x,y) do plano (imagens geométricas de z) cuja distância à imagem geométrica de z_1 é menor ou igual a um determinado número positivo r (círculo)



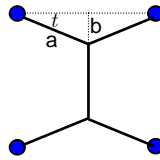
$|z - z_1| = |z - z_2|$ representa todos os pontos P(x,y) do plano (imagens geométricas de z) equidistantes das imagens geométricas de z_1 e de z_2 (mediatriz do segmento da recta [AB], A imagem geométrica de z_1 e B imagem geométrica de z_2)



$\text{Arg}(z - z_1) = \theta$ representa a semi-recta de origem na imagem geométrica de z_1 e que faz um ângulo θ com o eixo Ox



3. Quatro aldeias situam-se nos quatro vértices de um quadrado com um quilómetro de lado. Ao fazer uma nova instalação de cabos ligando as quatro aldeias, a companhia dos telefones, inspirada nos trabalhos do matemático *Jacob Steiner* (séc. XIX), chegou à conclusão que a solução mais económica é a do tipo da figura ao lado.



- 3.1. Seja C a expressão que dá o comprimento total do cabo, em função do ângulo t .

Em função dos dados da figura, mostre que esse comprimento é dado por

$$C(t) = 1 + \frac{2 - \sin t}{\cos t}, \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

- 3.2. Calcule $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- 3.3. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor do ângulo t de modo que o comprimento total do cabo seja o menor possível.

Indique o valor desse comprimento, na unidade considerada, arredondado às décimas.

4. Um cesto tem seis laranjas e cinco maçãs. Outro cesto tem seis laranjas e oito maçãs.

- 4.1. Tiram-se, aleatoriamente, duas peças de fruta de cada cesto. Quantas extracções diferentes se podem fazer?

- 4.2. Suponha agora que **foi escolhido**, ao acaso, um dos cestos. Tiram-se, também ao acaso, duas peças de fruta. Qual é a probabilidade de serem ambas laranjas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

5. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos quaisquer tal que $B \neq \emptyset$.

Prove que

$$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

(\bar{A} designa o acontecimento contrário de A)

FIM

3. Considere a função f , de domínio $]0, \pi[$ definida por $f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x}$.

- 3.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

- 3.1.1. Estude a função dada quanto à existência de assintotas do seu gráfico.

- 3.1.2. Prove que $\frac{f(x)-1}{f'(x)} = -\operatorname{tg} x \quad \forall x \in]0, \pi[$.

- 3.2. Na figura está representada parte do gráfico da função g definida por $g(x) = f(x) - 1$.

Na mesma figura está também representado um triângulo rectângulo $[BOA]$.

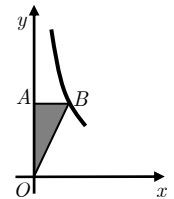
O ponto B pertence ao gráfico de g e tem ordenada

1,5.

Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo $[BOA]$ (apresente o resultado arredondado às décimas).

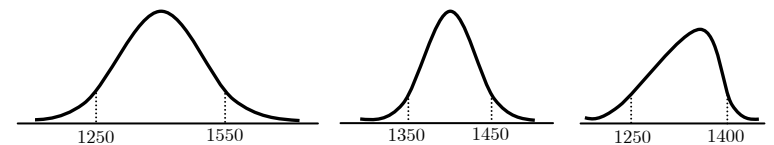
Explique como procedeu.

Nota: sempre que, nos valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.



4. Os automóveis de uma dada zona de certa cidade foram objecto de estudo.

- 4.1. A cilindrada de todos os automóveis (em cm^3) dessa zona segue uma distribuição aproximadamente normal de média 1400 e desvio-padrão 150. Indique, justificando, qual dos seguintes é o gráfico adequado a esta distribuição.



- 4.2. Nessa zona da cidade, 40% dos automóveis são todo-o-terreno. Destes, 70% têm leitor de discos compactos. Nos outros automóveis, 85% têm leitor de discos compactos. Escolhe-se um automóvel ao acaso nessa zona. Qual é a probabilidade de ele ter leitor de discos compactos?

FIM

PROVA MODELO 6

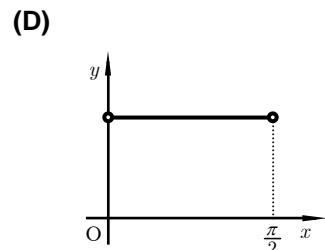
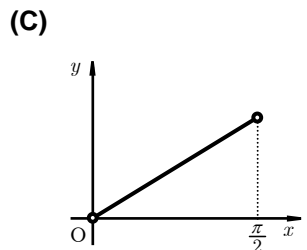
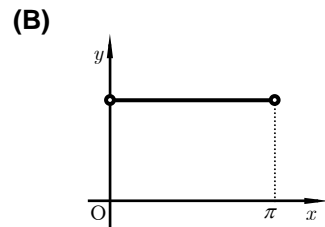
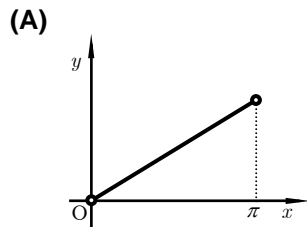
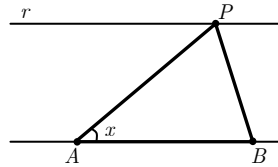
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura ao lado estão representados duas rectas paralelas, a recta r e a recta AB . O ponto P move-se ao longo da recta r .
 Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude do ângulo PAB e seja $h(x)$ a área do triângulo ABP .
 Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h ?



2.1.1.....10 pontos
 Nº maneiras = $4! \times 6!$ 9
 = 17280.....1

2.1.2.....10 pontos
 Nº maneiras = $4! \times 6! \times 7$ 9
 = 120960.....1

2.2.....12 pontos
 Referência à Regra de Laplace..3
 Explicação do número de casos possíveis3
 Explicação do número de casos favoráveis3
 Composição.....3

ou duas de 50 euros e uma de 20 (neste caso, existem $1 \times {}^3C_1$ casos favoráveis). Assim, o nº de casos favoráveis é igual a ${}^4C_2 + {}^3C_1 = 9$.

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis a esse acontecimento (quando estes são todos equiprováveis). Portanto, a resposta é a do enunciado.

Como se extraem, ao acaso, 3 notas de uma só vez de entre 10, logo o número de casos possíveis é igual a ${}^{10}C_3$.
 A quantia pedida de 120 euros é possível se ela tirar uma nota de 100 euros e duas de 10 (neste caso, existem $1 \times {}^4C_2$ casos favoráveis)

3.1.....14 pontos
 $f'(x) = (1 - 2x)e^{1-2x}$ 3
 $f''(x) = (4x - 4)e^{1-2x}$ 3
 $f''(x) = 0$ 1
 $\Leftrightarrow x = 1$3

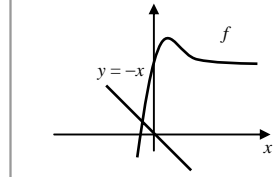
	$-\infty$	1	$+\infty$1
$f''(x)$	-	0	+2
f	\cap	P.I.	\cup1

3.2.....14 pontos
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} e^{1-2x}$..1
 $= \infty + e = \infty$ 1
 $x = 0$ é assíntota vertical.....1
 Referir que não há mais assíntotas verticais.....1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-2x}$..2
 $= 0 + 0 = 0$ 2
 $y = 0$ é assíntota horizontal...1
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 + (+\infty) = +\infty$..4
 $x \rightarrow -\infty$

Referir que não há mais assíntotas horizontais..1

3.3.....12 pontos
 Gráficos ou explicação do método6
 $x \approx -0,41$6



4.1.....14 pontos
 $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$2
 $= \cos\frac{\pi}{3} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{3} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$..2

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$..8
 $= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ 2