Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/Época Especial

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 12, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

GRUPO I

Desde a infância, o Duarte costuma passar as férias no Alentejo. Com o avô, aprendeu a observar o céu, a reconhecer as estrelas e a gostar de astronomia.

Agora, concluído o 12.º Ano, pretende adquirir formação superior nesse ramo da ciência.

1. O Duarte verificou que, actualmente, em Portugal, no Ensino Superior Público, apenas é possível obter a licenciatura em Astronomia no Curso de Astronomia, leccionado na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e encontrou alguns dados estatísticos de candidaturas a esse Curso, relativos a anos anteriores.

Nesses registos, constatou que, nos últimos dois anos, relativamente à percentagem, arredondada às décimas, de candidatos admitidos no Curso de Astronomia dessa Universidade, se verificou o seguinte:

- em 2008, foram admitidos $21{,}1\%$ dos candidatos ao Curso;
- em 2009, foram admitidos $18{,}2\%$ dos candidatos ao Curso.

1.1. Determine o número de candidatos ao Curso de Astronomia, no ano de 2009, sabendo que, nesse ano, foram admitidos 32 dos candidatos ao Curso.

1.2. No ano de 2008, foram admitidos 31 candidatos, de ambos os sexos, no Curso de Astronomia.

Admita que, desses 31 candidatos, se escolheram, ao acaso, sucessivamente, dois deles para a entrega de prémios numa gala da Universidade: um candidato para entregar o primeiro prémio e um outro candidato para entregar o segundo prémio.

Seja X a variável aleatória: «Número de candidatos do sexo masculino escolhidos para entregar os dois prémios».

Na tabela seguinte, encontra-se representada a distribuição de probabilidades da variável aleatória X

x_i	0	a	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{31}$	b	$\frac{14}{31}$

1.2.1. Indique o valor de a e determine o valor de b

1.2.2. Determine o número de candidatos do sexo masculino que foram admitidos no Curso de Astronomia, no ano de 2008.

2. Com as suas leituras, o Duarte aprendeu que o brilho aparente das estrelas é estudado desde a Antiguidade. Os astrónomos medem o brilho das estrelas através do conhecimento das respectivas magnitudes, a magnitude absoluta, M, e a magnitude aparente, m, de uma estrela.

Sabe-se que a magnitude absoluta, M, e a magnitude aparente, m, de uma estrela podem relacionar-se através da fórmula

$$M = m + 5 \log \left(\frac{10}{d} \right)$$

em que d é a distância, em parsecs, a que a estrela se encontra da Terra, e em que $\log$ designa logaritmo de base 10

Suponha que a magnitude absoluta de uma estrela excede a sua magnitude aparente em 5 unidades.

Determine a distância, em parsecs, a que essa estrela se encontra da Terra.

GRUPO II

Foi pedido a um artista plástico que projectasse um mural rectangular, com 10 metros de comprimento e $6{,}20$ metros de altura, em homenagem a J. Monteiro da Rocha, um grande astrónomo português do séc. XVIII.

A Figura 1, que não está à escala, representa um esquema da vista de frente do mural.

O artista pretende dispor 31 tiras de alumínio, justapostas, de acordo com o que sugere a Figura 1.

Considera-se desprezável a espessura de cada tira de alumínio.

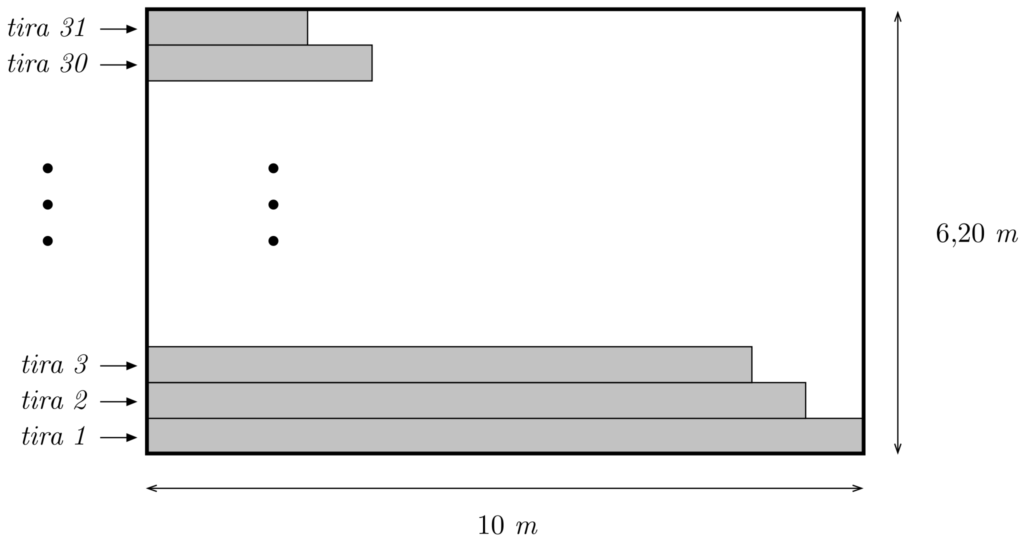

Figura 1

Todas as tiras têm $20\,cm$ de altura e apenas variam no comprimento:

- a *tira 1*, colocada na base, tem $10\,m$ de comprimento;
- a *tira 2*, colocada imediatamente acima da *tira 1*, tem menos $30\,cm$ de comprimento que a *tira 1*
- a *tira 3*, colocada imediatamente acima da *tira 2*, tem menos $30\,cm$ de comprimento que a *tira 2*
- e assim sucessivamente, tendo cada tira menos $30\,cm$ de comprimento que a tira precedente, até à *tira 31*, que tem $1\,m$ de comprimento.

1. Determine a área do mural, em metros quadrados, que será ocupada pelas 31 tiras.

2. Mostre que o comprimento, em metros, da *tira* n, para $n \in \{1, \ldots, 31\}$, é dado pela expressão $10{,}3 - 0{,}3\,n$

3. Considere uma função, f, definida em $[1, +\infty[$

Admita que $f(1) = 10$ e que a taxa de variação média de f, em qualquer intervalo do seu domínio, é sempre igual a $-0{,}3$

Mostre que f é dada por $f(x) = 10{,}3 - 0{,}3\,x$

Sugestão:

Na sua resposta, comece por:

- substituir x por 1 na expressão $10{,}3 - 0{,}3\,x$ e verificar que o valor resultante é igual a $f(1)$
- escrever uma expressão para a taxa de variação média de f no intervalo $[1, x]$, com $x > 1$, sem utilizar a igualdade $f(x) = 10{,}3 - 0{,}3\,x$

GRUPO III

O pára-quedismo é um dos desportos de aventura praticados no nosso país.

Considere que, num determinado salto, o Tomás, que é pára-quedista, se lançou de um avião e desceu em queda livre durante cerca de 20 segundos. Em seguida, abriu o pára-quedas e continuou a descer, até atingir o solo.

Admita que a distância d, em metros, do Tomás ao solo, t segundos após o início do salto, no intervalo de tempo em que o Tomás desceu em queda livre, é modelada, aproximadamente, por:

$$d(t) = 0{,}0847t^3 - 3{,}5679t^2 - 8{,}3295\,t + 3000 \qquad \text{para} \quad t < 20$$

Admita, ainda, que a distância d, em metros, do Tomás ao solo, t segundos após o início do salto, no intervalo de tempo que decorreu desde o instante da abertura do pára-quedas até ao instante em que o Tomás atingiu o solo, é modelada, aproximadamente, por:

$$d(t) = 0{,}0055\,t^2 - 7{,}3333\,t + 2228{,}3160 \qquad \text{para} \quad t \geq 20$$

1. Calcule a distância, em metros, a que o Tomás se encontrava do solo, no instante em que abriu o pára-quedas.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

2. Determine o tempo decorrido, em minutos, desde o instante em que o Tomás se lançou do avião até ao instante em que atingiu o solo.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

3. A taxa de variação instantânea de d, em $t = 10$, é, aproximadamente, $-54\ m\,/\,s$

Interprete esta afirmação, no contexto descrito.

GRUPO IV

O Manuel reside numa localidade onde existe um coreto semelhante ao que se observa na Figura 2.

A cobertura do coreto tem oito faces, geometricamente iguais, que constituem a superfície lateral de uma pirâmide octogonal regular.

A Figura 3, que não está à escala, representa, esquematicamente, uma pirâmide cuja superfície lateral é idêntica à cobertura do coreto.

Figura 2

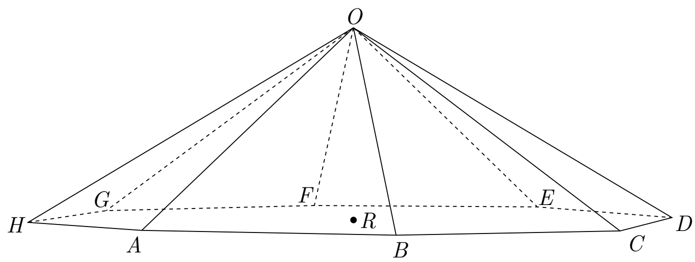

Figura 3

O octógono regular $[ABCDEFGH]$ é a base da pirâmide. Os pontos O e R são, respectivamente, o vértice superior e o centro da base da pirâmide. O triângulo isósceles $[ABO]$ é uma das oito faces laterais da pirâmide.

A Figura 4, que não está à escala, representa a face $[ABO]$ da pirâmide. Nesta face, a parte representada pelo trapézio isósceles $[IJQP]$ está pintada de branco e a parte restante está pintada de cinzento.

Sabe-se que:

- $\overline{AO} = 3 \text{ metros}$
- $\overline{AI} = \overline{IO} = 2 \times \overline{PO}$
- $A\hat{O}B = 40^{\circ}$
- N, M e L são, respectivamente, os pontos médios de $[AB]$, $[IJ]$ e $[PQ]$

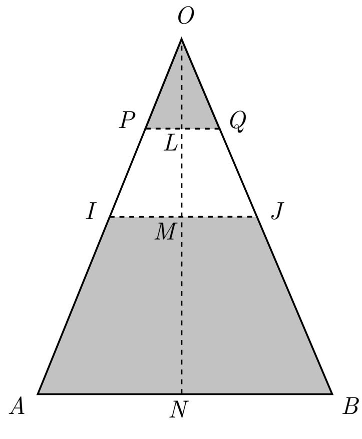

Figura 4

1. Mostre que $2{,}052$ é o valor, em metros, arredondado com três casas decimais, de $\overline{AB}$

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, quatro casas decimais.

2. Mostre que a área do trapézio $[ABJI]$ é igual a doze vezes a área do triângulo $[PQO]$

Nota: Se efectuar cálculos, não proceda a arredondamentos.

3. Na Figura 5, estão representados os trapézios isósceles $[ABJI]$ e $[IJQP]$, contidos no triângulo $[ABO]$

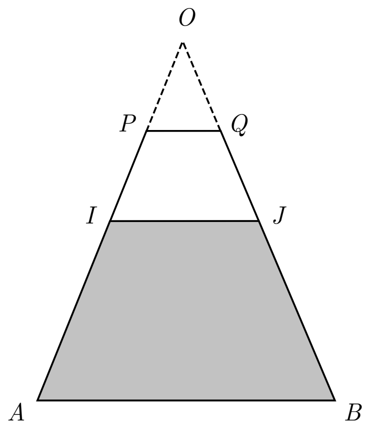

Figura 5

O Manuel, num trabalho de Geometria que efectuou para a disciplina de Matemática B, utilizou o facto de os trapézios $[ABJI]$ e $[IJQP]$ serem semelhantes, para relacionar os respectivos perímetros e relacionar as respectivas áreas.

Nesse trabalho, o Manuel afirmou que:

$\mathrm{I})$ o valor da razão de semelhança que permite obter $[IJQP]$, a partir de $[ABJI]$, é $\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{II})$ o perímetro de $[IJQP]$ é metade do perímetro de $[ABJI]$

$\mathrm{III})$ a área de $[IJQP]$ é metade da área de $[ABJI]$

Elabore uma pequena composição, em que:

- indique se a afirmação I é verdadeira ou falsa e justifique a sua escolha;
- indique se a afirmação II é verdadeira ou falsa e justifique a sua escolha;
- indique se a afirmação III é verdadeira ou falsa e justifique a sua escolha.

4. Perto do coreto, existe um poste de electricidade. Colocou-se um fio eléctrico esticado, com lâmpadas aplicadas, unindo o topo desse poste, o topo do coreto e um ponto da base da cobertura do coreto.

A Figura 6 representa, esquematicamente, a situação.

Considere que:

- todos os pontos representados pertencem ao mesmo plano vertical;
- os pontos O e R representam, respectivamente, o vértice superior e o centro da base da cobertura do coreto;
- os pontos H e D representam vértices opostos da base octogonal da cobertura do coreto;
- os pontos W e T representam, respectivamente, a base e o topo do poste;
- os pontos S e U pertencem ao segmento $[WT]$
- o triângulo $[DTO]$, que não é um triângulo rectângulo, representa o fio eléctrico;
- θ designa a amplitude, em graus, do ângulo DTO
- ZW representa o plano horizontal do solo;
- $ZW \perp ZO,\ ZW \perp WT,\ RS \perp ST$ e $OU \perp UT$
- $\overline{WU} = 7$ metros
- $\overline{WT} = 12$ metros
- $\overline{RO} \approx 1{,}364$ metros
- $\overline{RD} \approx 2{,}672$ metros
- $\overline{DS} = 4$ metros

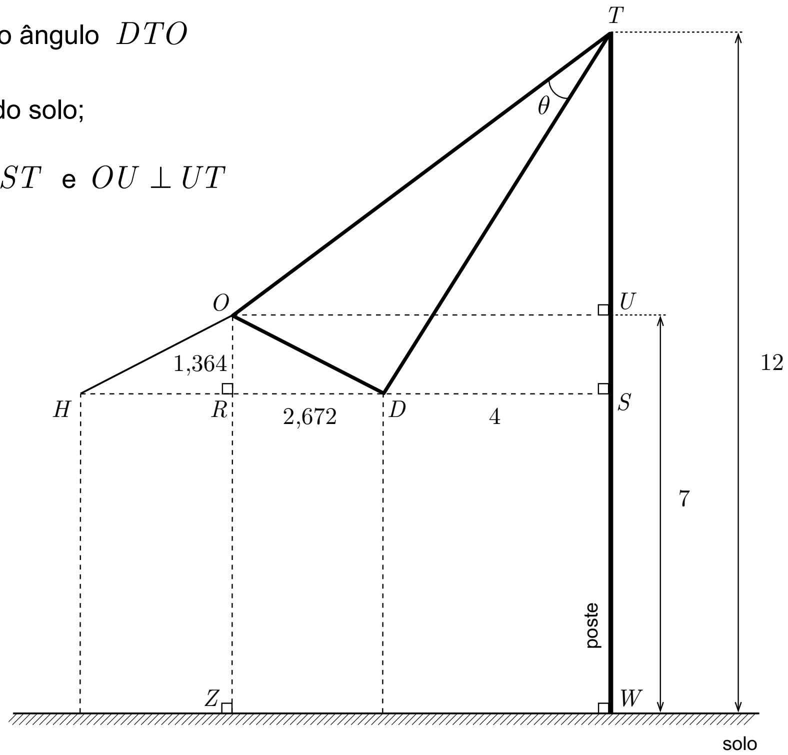

Figura 6

Determine o valor de θ

Apresente a resposta com o valor arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.		
1.1.		5 pontos
1.2.		25 pontos
1.2.1.	10 pontos	
1.2.2.	15 pontos	
2.		20 pontos
		50 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos	
2.	10 pontos	
3.	20 pontos	
		45 pontos

GRUPO III

1.	10 pontos	
2.	20 pontos	
3.	10 pontos	
		40 pontos

GRUPO IV

1.	15 pontos	
2.	10 pontos	
3.	20 pontos	
4.	20 pontos	
		65 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$ (*r – raio*)

Área lateral de um cilindro recto: $2\, \pi\, r\, g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$ (*r – raio*)

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, então:

- média de X:

$$\mu = p_1\, x_1 + \ldots + p_n\, x_n$$

- desvio padrão de X:

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal, de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$