Prova Escrita de Matemática B

11.º/12.º Anos de Escolaridade

Prova 735/Época Especial 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, na página 11, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

GRUPO I

Um baralho de cartas tem quatro naipes: Paus, Espadas, Ouros e Copas.

De cada naipe, foram seleccionadas apenas as cartas com os números 3, 4, 5, 6 e 7, obtendo-se, assim, um baralho reduzido, constituído por vinte cartas, sendo cinco de cada naipe.

Três amigos, a Ana, a Beatriz e o Carlos, inventaram o jogo seguinte:

«Extrai-se, ao acaso, do baralho reduzido, uma carta, regista-se o respectivo número e ***repõe-se*** *a carta no mesmo baralho. Depois, retira-se, ao acaso, uma segunda carta, da qual também se regista o respectivo número.*

Antes de se extraírem as cartas, cada jogador efectua, obrigatoriamente, apenas uma das três apostas seguintes, relativamente aos números das duas cartas que vão ser retiradas do baralho reduzido.

Aposta A): os números são ambos ímpares.

Aposta B): um dos números é ímpar e o outro é par.

Aposta C): os números são ambos pares.»

No início do jogo, a Ana fez a Aposta A); a Beatriz, a Aposta B); e o Carlos, a Aposta C).

1. Verifique que a probabilidade de a Ana ganhar é $0{,}36$.

2. Qual dos jogadores tem maior probabilidade de vencer o jogo?

Justifique.

GRUPO II

Os expoentes máximos da arquitectura do antigo Egipto são as pirâmides.

Não se conhecem quaisquer registos relativos ao cálculo do volume de uma pirâmide efectuado pelos antigos egípcios. No entanto, encontrou-se um papiro onde se faz referência a um método para determinar o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular. Esse método corresponde, na notação actual, à seguinte fórmula:

$$V = \frac{1}{3} h \left(a^2 + ab + b^2\right)$$

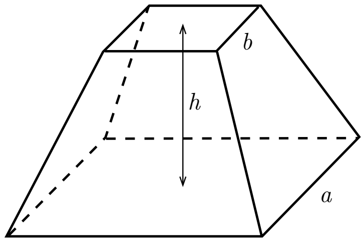

Fig. 1

Na fórmula, V representa o volume de um tronco de uma pirâmide quadrangular regular, h representa a medida da altura do tronco, e a e b representam, respectivamente, as medidas do lado da base inferior e do lado da base superior do tronco.

A pirâmide de Quéops, a maior do planalto de Gizé, não tem, actualmente, a forma de uma pirâmide. De facto, assemelha-se a um tronco de pirâmide, pois, com o tempo, perdeu a sua cúspide. O monumento tem uma base quadrada com cerca de $230\ \mathrm{m}$ de lado. Quando foi construído, teria cerca de $146\ \mathrm{m}$ de altura. Actualmente, tem cerca de $136\ \mathrm{m}$ de altura.

Fig. 2

As figuras 3 e 4, que não estão à escala, representam a situação.

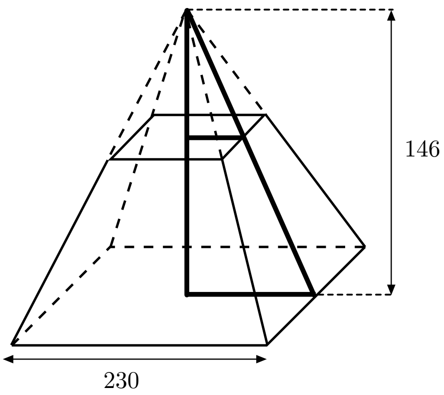

Fig. 3

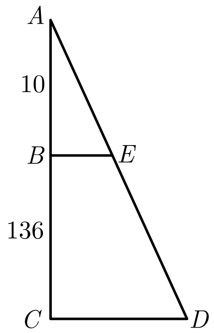

Fig. 4

1. Determine o volume da pirâmide de Quéops, considerando que a sua forma actual corresponde a um tronco de pirâmide quadrangular regular.

Para responder ao item, percorra as seguintes etapas:

- mostre que os triângulos $[ABE]$ e $[ACD]$, representados na figura 4, são semelhantes;
- calcule $\overline{BE}$;
- calcule o volume pedido.

Apresente o resultado em metros cúbicos, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

2. Suponha que se queria construir um monumento, para suporte de uma estátua, com a forma de um tronco de pirâmide quadrangular regular que tivesse:

- 175 metros cúbicos de volume;
- 3 metros de altura;
- a base inferior, quadrada, com 10 metros de lado.

Determine a medida exacta, em metros, do lado da base superior do monumento.

GRUPO III

Desde o nascimento, até aos 20 anos, a altura da Rita foi sempre aumentando.

Admita que a altura, A, da Rita, em centímetros, evoluiu, aproximadamente, de acordo com a função definida por:

$$A(t) = \frac{170}{1 + 1{,}9\ e^{-0{,}22t}} \quad \text{com } t \in [0{,}20]$$

A variável t representa a idade da Rita, em anos.

1. Mostre que, até aos 20 anos, a altura da Rita não atingiu o valor de $175\ \text{cm}$.

2. A tabela seguinte apresenta valores de referência para as alturas das raparigas com idades compreendidas entre os 6 e os 8 anos. Estes valores foram publicados pela Organização Mundial de Saúde (*2007 WHO Reference*).

Idade (anos)	6	6,5	7	7,5	8
Altura (cm)	115,1	118,0	120,8	123,7	126,6

Considere a afirmação: *«De acordo com a função A, aos 6 anos de idade, a altura da Rita estava **abaixo** do respectivo valor de referência mas, aos 8 anos de idade, a sua altura já estava **acima** do valor de referência estabelecido para essa idade»*.

Justifique que a afirmação anterior é verdadeira.

Apresente os valores relevantes para a sua resposta, com aproximação às décimas.

3. Na figura 5 apresenta-se um esboço do gráfico da função f, que dá a **taxa de variação instantânea** de A, no instante t.

Neste esboço, está assinalado o ponto P, de abcissa 12.

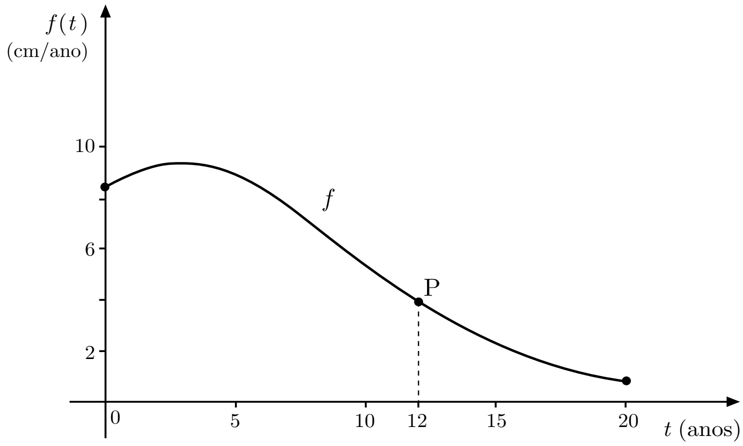

Fig. 5

3.1. Sabe-se que $f(12) \approx 4$ (valor aproximado às unidades).

Explique, no contexto da situação, o que representa a expressão $f(12) \approx 4$.

3.2. Justifique que a taxa de variação média da função A é sempre positiva, em qualquer intervalo fechado $[a,\ b]$, contido no seu domínio, sendo a e b números reais, com $a < b$.

GRUPO IV

Um artesão construiu uma sequência de bonecas, inspirando-se em bonecas da Rússia, popularmente conhecidas por *Matrioshkas*.

Todas as bonecas são ocas, à excepção da menor, que é a primeira da sequência. A boneca menor pode ser colocada dentro da segunda boneca, que, por sua vez, pode ser colocada dentro da boneca seguinte, e, assim sucessivamente, até à boneca maior.

A figura 6, que não está à escala, apresenta apenas as **cinco primeiras** bonecas da sequência colocadas da esquerda para a direita, por ordem crescente de alturas.

Fig. 6

A altura da boneca menor é de $2\ \mathrm{cm}$. A diferença de alturas entre duas bonecas consecutivas é sempre igual a $1{,}8\ \mathrm{cm}$.

1. Na sequência completa, existe uma boneca cuja altura é de $11\ \mathrm{cm}$. Essa boneca não está representada na figura 6.

Determine a posição dessa boneca na sequência.

2. Somaram-se as alturas de todas as bonecas da sequência completa e obteve-se o valor exacto de $142{,}8\ \mathrm{cm}$.

Calcule o número total de bonecas da sequência.

GRUPO V

Admita que, num certo dia, a temperatura, em graus Celsius $(^{\circ}\mathrm{C})$, num laboratório, é dada por

$$f(t) = 20 + 4\cos\left(\frac{\pi(t+10)}{12}\right) \quad \text{com } t \in [0,\, 24]$$

Nesta expressão:

- a variável t representa o tempo, em horas, contado a partir das zero horas desse dia;
- o argumento da função co-seno é medido em radianos.

1. Entre as 6 e as 10 horas da manhã, a temperatura no laboratório aumentou.

De quanto foi esse aumento de temperatura?

2. Pretende-se desenvolver uma cultura de bactérias no mesmo laboratório. Para o efeito, devem ser respeitadas as seguintes condições, relativamente à temperatura no laboratório naquele dia.

$\mathrm{I})$ a temperatura não pode ser superior a $22\ ^{\circ}\mathrm{C}$ mais de 10 horas consecutivas;

$\mathrm{II})$ a diferença entre os valores das temperaturas máxima e mínima não pode ultrapassar $9\ ^{\circ}\mathrm{C}$;

$\mathrm{III})$ nas primeiras 5 horas do dia, a temperatura tem de ser sempre inferior a $19\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Elabore uma pequena composição na qual refira se cada uma das condições, $\mathrm{I})$, $\mathrm{II})$ e $\mathrm{III})$, é ou não cumprida, explicitando, para cada caso, uma razão que fundamente a sua resposta.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I		**35 pontos**
1.	15 pontos	
2.	20 pontos	
GRUPO II		**40 pontos**
1.	20 pontos	
2.	20 pontos	
GRUPO III		**65 pontos**
1.	15 pontos	
2.	20 pontos	
3.	30 pontos	
3.1. 15 pontos		
3.2. 15 pontos		
GRUPO IV		**30 pontos**
1.	15 pontos	
2.	15 pontos	
GRUPO V		**30 pontos**
1.	10 pontos	
2.	20 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (*r – raio*)

Área lateral de um cilindro recto: $2 \pi r g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$ (*r – raio*)

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, então

- média de X:

$$\mu = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n$$

- desvio padrão de X:

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \ldots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se X é uma variável aleatória normal, de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$