Escola Secundária de Francisco Franco (2010/2011)
Matemática A – 12.º ano

DESAFIOS
(Cálculo Diferencial)

1. Aquando da descoberta (no início de Dezembro de 2010) sobre as bactérias que podem substituir o fósforo por arsénio nos elementos fundamentais constituintes das células (ver, por exemplo, http://astropt.org/blog/2010/12/08/criticas-aumentam-a-bacteria-de-arsenico/), uma microbióloga disse o seguinte:

"(…) *sugerindo que a população de bactérias aumenta 10% por dia. Eu penso que isto significa que a bactéria duplica ao fim de 10 dias.*"

Ora, o que a microbióloga quis dizer foi que, se o aumento da bactéria é de 10% ao dia, logo 10%×10=100% pelo que são necessários 10 dias para haver uma duplicação da bactéria.
Vindo de uma microbióloga responsável por todo um laboratório de investigação, esta conclusão é LAMENTÁVEL (não são necessários tantos dias).
Porquê? Quantos dias seriam então precisos (arredondados às centésimas) para o n.º de bactérias duplicar?

2. **2.1.** Considere a função definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$f(0) \times f(2) < 0$ mas f não tem zeros em $]0, 2[$
Estará este facto em contradição com o teorema de Bolzano?

2.2. Considere a função definida por $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

$g(-1) \times g(2) < 0$ mas g não tem zeros em $]-1, 2[$
Estará este facto em contradição com o teorema de Bolzano?

Testes de Matemática A do 12.º ano: enunciados e resoluções (2010/2011)

3. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, e tal que o seu gráfico admite a bissectriz dos quadrantes ímpares como assimptota oblíqua.
Assim, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0$

Quererá isto dizer que se pode substituir sempre $f(x)$ por x? Ao contrário do que se pode pensar, esta conclusão é FALSA. Porquê?

Para demonstrar que é falsa a conclusão anterior, pode-se arranjar um contra-exemplo.

Suponha-se que $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e seja g uma função, também de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^x[f(x) - x]$

Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ de duas maneiras, usando, por um lado, a expressão de f e, por outro, substituindo essa expressão por x

4. **4.1.** Considere a função definida por $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Existe $f'(0)$ mas f é descontínua em $x = 0$. Estará isto em contradição com o teorema sobre derivabilidade e continuidade?

4.2. Considere a função definida por $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

g é descontínua em $x = 2$ mas existe $g'(2)$. Estará isto em contradição com o teorema sobre derivabilidade e continuidade?