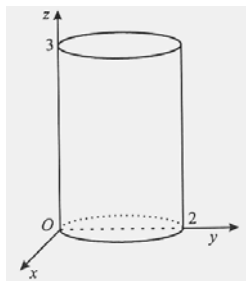


Problemas de optimização; aplicações das taxas de variação e programação linear como ferramenta de planeamento e gestão.

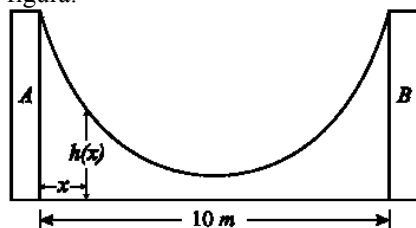
Exercícios (adaptados) saídos em Exames (Matemática A – 2001-2006)

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução. Tem-se que: a altura do cilindro é 3; uma das bases está contida no plano xOy , sendo o seu centro o ponto $(0,1,0)$ e o seu raio igual a 1. Seja $b \in]0,2[$ e seja f a função que, a cada valor de b , faz corresponder o perímetro da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $y=b$. Qual é o máximo da função f ?



- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
(2002 - 2ª chamada)

2. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função definida por $h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11)$

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

a) Determine a altura da parede A. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

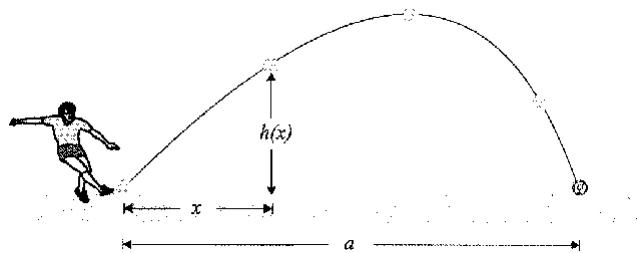
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Estude a função h quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

c) Mostre que $h(5-x) = h(5+x)$. Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

(2003 - 2ª chamada)

3. Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu. Considere a função h definida em $[0,a]$ por $h(x) = 2x + 10 \ln(1 - 0,1x)$.

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

a) Determine o valor de a , arredondado às centésimas.

b) Estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

(2005 - 2ª fase)

4. Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 160 hectares. Pretende semear pelo menos 50 hectares de trigo e pelo menos 30 hectares de milho.

Sabe-se que: • o custo de produção de um hectare de trigo é 1500 euros; • o custo de produção de um hectare de milho é 1000 euros; e que: • cada hectare de trigo dá um lucro de 600 euros; • cada hectare de milho dá um lucro de 500 euros.

Sabendo ainda que o agricultor não pode investir mais do que 200000 euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo que tenha um lucro máximo?

(Teste intermédio 11.º 2006)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2006)

5. Encomendaram-se a um pasteleiro dois tipos de bolos para uma festa de casamento. Cada quilograma de bolo do tipo A dá um lucro de 5 euros, e cada quilograma de bolo do tipo B dá um lucro de 7 euros. Relativamente aos produtos necessários à confecção dos bolos, o pasteleiro só tem limitações em dois: dispõe apenas de 10 Kg de açúcar e de 6 Kg de farinha. Sabe-se que:

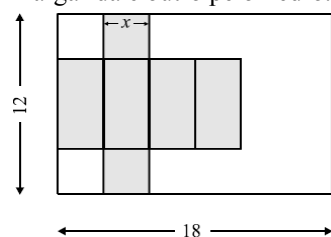
- cada quilograma de bolo do tipo A leva 0,4 Kg de açúcar e 0,2 Kg de farinha;
- cada quilograma de bolo do tipo B leva 0,2 Kg de açúcar e 0,3 Kg de farinha.

a) O pasteleiro pensa fazer 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B. Será que é possível? Justifique a sua resposta.

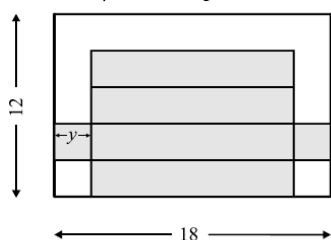
b) Quantos quilogramas de bolo do tipo A e quantos quilogramas de bolo do tipo B deve o pasteleiro fabricar para ter o maior lucro possível?

(Exemplos Gave)

6. A Margarida e o Pedro são irmãos. Cada um deles quer construir um prisma quadrangular regular, a partir de uma folha de cartolina rectangular, com 18 unidades de comprimento e 12 de largura. Na figura, estão representados dois esquemas de possíveis planificações, um feito pela Margarida e outro pelo Pedro.



Esquema da Margarida



Esquema do Pedro

• x designa o comprimento da aresta da base do prisma da Margarida; • y designa o comprimento da aresta da base do prisma do Pedro. Admita que cada um dos dois irmãos constrói o prisma que, de acordo com o esquema que fez, tem volume máximo. Pretende-se saber qual dos dois irmãos obtém o prisma com maior volume. Pretende-se também saber qual deles desperdiça menos cartolina com a sua construção. Tendo em vista este objectivo, sugere-se que, relativamente a cada uma das construções, determine:

- O conjunto dos valores que a variável pode assumir, tornando possível a construção do prisma.
- O valor da variável para o qual o volume é máximo e o valor desse volume.
- A área de cartolina desperdiçada.

(Exemplos Gave)

7. A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no Dia dos Namorados. Idealizaram arranjos formados por margaridas, rosas e violetas. Dispõem de: 192 margaridas, 88 rosas e 112 violetas. Pensaram formar dois tipos de arranjos: A e B.

Cada arranjo do tipo A:

- será composto por 16 margaridas, 4 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 3 euros.

Cada arranjo do tipo B:

- será composto por 8 margaridas, 8 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 2 euros.

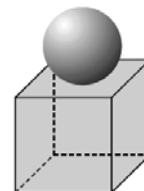
a) A Isabel sugeriu que se fizessem 7 arranjos de cada tipo.

O Dinis sugeriu que se fizessem 10 arranjos do tipo A e 5 do tipo B. Averigüe se cada uma destas propostas é, ou não, viável, tendo em conta as flores disponíveis.

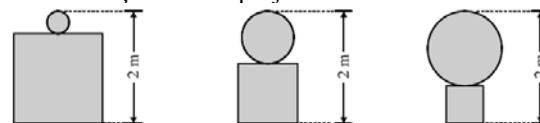
b) Determine o número de arranjos de cada tipo que os alunos devem produzir, para obterem o maior lucro possível (admitindo que vendem todos os arranjos).

(1ª fase)

8. Na figura, está representado um projecto de uma escultura em cimento para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo.



Pretende-se que a escultura tenha uma altura total de 2 metros. Apresentam-se, a seguir, as vistas de frente de três possíveis concretizações desse projecto.



a) Designemos por x o raio da esfera (em metros).

a₁) Indique, na forma de intervalo de números reais, o conjunto dos valores que a variável x pode assumir.

a₂) Mostre que o volume total, V , em metros cúbicos, da escultura é dado, em função de x , por

$$V(x) = \frac{4\pi - 24}{3} x^3 + 24x^2 - 24x + 8$$

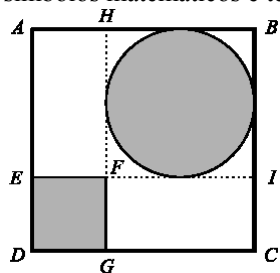
a₃) Determine o raio da esfera e a aresta do cubo de modo que o volume total da escultura seja mínimo. Apresente os resultados em metros, arredondados às centésimas.

b) Admita agora que o raio da esfera é metade da aresta do cubo. Pretende-se pintar toda a superfície da escultura, excepto, naturalmente, a face do cubo que está assente no chão. Cada litro da tinta que vai ser utilizada permite pintar uma superfície de 2,5 m². Admitindo que esta tinta só é vendida em latas de 1 litro, quantas latas será necessário comprar?

(2ª fase)

9. Na figura está o primeiro esboço de um logotipo que o João está a construir para o Clube de Matemática da sua escola.

Dentro do quadrado [ABCD] estão representados, a sombreado, um círculo e um quadrado [DEFG], nos quais vão ser colocados desenhos alusivos a jogos matemáticos. Na região branca, ou seja, não sombreada, vão ser colocados símbolos matemáticos e texto.

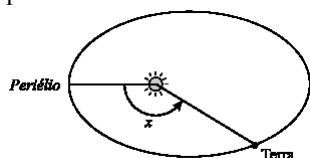


Sabe-se que: • $\overline{AB} = 1$; • o círculo está inscrito no quadrado [FHBI]. Designando por x o lado do quadrado [DEFG], determine o valor de x para o qual a área da região branca é máxima. Apresente o valor pedido, arredondado às centésimas.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- exprima, em função de x ,
 - a área do quadrado sombreado,
 - o raio do círculo sombreado,
 - a área do círculo sombreado,
 - a área da região sombreada,
 - a área da região branca;
 - recorrendo à sua calculadora, determine o valor pedido.
- (Teste intermédio Matemática B)

10. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi[$). Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância d , em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x , por $d = 149,6(1 - 0,0167 \cos x)$

a) Determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que x verifica a relação

$$\frac{2\pi t}{T} = x - 0,0167 \sin x, \text{ em que}$$

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x ;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

b₁) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b₂) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora. (2ª fase)

11. Para estudar a Lei do Arrefecimento de um Corpo, a Joana aqueceu uma pequena quantidade de água. Em seguida, deixou-a a arrefecer, medindo a temperatura em vários instantes, a partir de um certo instante inicial. De acordo com a referida lei, em cada instante, a taxa de variação da temperatura é directamente proporcional à diferença entre a temperatura da água, nesse instante, e a temperatura ambiente, que se considera constante. Tem-se, portanto, que

$$T'(t) = k[T(t) - A] \text{ em que:}$$

- $T(t)$ designa a temperatura da água, no instante t ;
- $T'(t)$ designa a taxa de variação da temperatura, nesse mesmo instante;
- A designa a temperatura ambiente;
- k é a constante de proporcionalidade.

Admita que, durante a experiência, o tempo foi medido em minutos e a temperatura em graus Celsius. Na tabela seguinte, estão valores da temperatura da água, registados de 0,5 em 0,5 minutos, com início no instante $t = 2$.

t	2	2,5	3	3,5
$T(t)$	85,0	83,8	82,6	81,5

Tendo em conta os dados desta tabela e sabendo que a temperatura ambiente, no local da experiência, era de 25 graus Celsius, estime o valor de k . Apresente o resultado arredondado às centésimas.

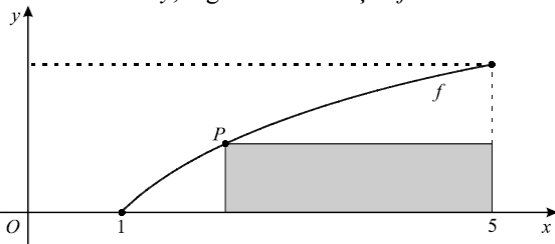
Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- Determine a taxa de variação média da temperatura da água, nos intervalos $[2;3,5]$, $[2;3]$ e $[2;2,5]$.
- Tendo em conta os valores obtidos, estime a taxa de variação instantânea da temperatura da água, no instante $t = 2$.
- Tendo em conta a fórmula dada acima, estime o valor de k .

(2ª fase)

Exercícios (adaptados) saídos em Exames (Matemática A – 2007)

12. Seja f a função, de domínio $[1,5]$, definida por $f(x) = \ln x$. Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy , o gráfico da função f .



Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f .

Para cada posição do ponto P, considere o rectângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox , outro na recta de equação $x = 5$ e os outros dois nas rectas vertical e horizontal que passam pelo ponto P. Exprima a área do rectângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do rectângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

- o gráfico obtido; - o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

(1ª fase)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2007)

13. Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia eléctrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: energia de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de *fuel*, ou, em alternativa, energia eólica. Para uma cobertura razoável de iluminação, no período nocturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a 40 MWh. Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida. Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

• o preço por cada MWh é de 80 euros.

Relativamente à energia eólica, tem-se:

• o preço por cada MWh é de 90 euros;

• o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os 40 MWh.

Represente por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consumidas pela autarquia. Determine que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

• indique as restrições do problema; • indique a função objectivo; • represente graficamente a região admissível (referente ao sistema das restrições); • indique os valores de x e y para os quais é mínima a função objectivo.

(1ª fase)

14. O campo de futebol de um dado clube tem uma bancada destinada a não sócios, que leva 4000 espectadores. Se o preço de cada bilhete for 10 euros, prevê-se que a lotação dessa bancada fique esgotada. Com base em experiências anteriores, verifica-se que, se o preço de cada bilhete for aumentado numa certa percentagem, x , sobre o valor base (10 euros), o número de espectadores baixa metade dessa percentagem.

Por exemplo, se o preço dos bilhetes aumentar 10%, $x = 0,1$, o número de espectadores sofre um decréscimo de 5%. Admitindo a exactidão do modelo descrito e considerando sempre o aumento percentual, x , sobre o preço base (10 euros), responda às questões que se seguem.

a) Mostre que, se x for o aumento percentual do preço de cada bilhete para aquela bancada, num dado jogo, então a receita de bilheteira, R , é dada por:

$$R(x) = -20000x^2 + 20000x + 40000, \text{ com } 0 \leq x \leq 2$$

Tenha em atenção que:

• o preço de cada bilhete, p , em função do aumento percentual, x , é dado por $p(x) = 10(1 + x)$

• o número de espectadores, n , em função do aumento percentual, x , é dado por $n(x) = 4000 - 2000x$

b) Um dos elementos da direcção do clube sugere que o preço de cada bilhete seja de 20 euros, para serem maximizadas as receitas de bilheteira. Porém, um segundo elemento da direcção opõe-se, dizendo que o ideal é manter o preço de cada bilhete a 10 euros, uma vez que as receitas de bilheteira são superiores se assim for. Num pequeno texto, comente o argumento de cada um dos elementos da direcção do clube, tendo em conta o objectivo de maximizar as receitas de bilheteira. Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:

• o valor da percentagem, x , que a direcção do clube deve aplicar sobre o preço base (10 euros), para que se maximizem as receitas de bilheteira, e o respectivo valor da receita (no caso de discordar da opinião de cada um dos elementos da direcção);

• um argumento, fundamentado, referente às propostas de cada um dos elementos da direcção, dizendo se concorda, ou não, com elas;

• todos os elementos recolhidos na utilização da sua calculadora gráfica que se tenham mostrado relevantes.

(2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2008)

15.1. Pretende-se fazer um canteiro, no jardim de uma escola, com a forma de um quadrado de 7 metros de lado.

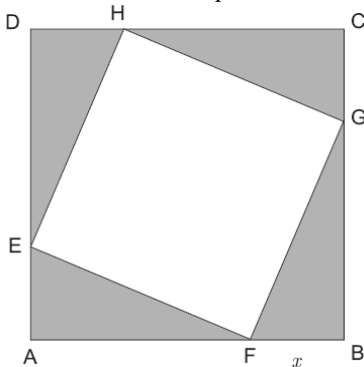


Fig. 1

A figura 1 representa um projecto desse canteiro, designado por $[ABCD]$, em que a região sombreada representa a zona que se pretende relvar, e o quadrado $[EFGH]$ representa o local destinado a plantar roseiras. Tem-se, em metros: $\overline{AE} = \overline{FB} = \overline{GC} = \overline{HD} = x$

a) Admita que $x = 3$. Pretende-se plantar 700 roseiras na zona reservada para esse efeito. Cada roseira necessita de uma área quadrangular com 20 centímetros de lado. Será possível plantar as 700 roseiras nessa zona? Justifique.

b) Mostre que a área, a , da região relvada, em metros quadrados, é dada, em função de x , por $a(x) = 14x - 2x^2$. Calcule $a(0)$ e interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

15.2. Nos itens seguintes, considere a função $a(x) = 14x - 2x^2$, definida no intervalo $[0, 7]$, no contexto descrito no grupo de itens anterior.

a) Mostre que a taxa de variação média da função a , no intervalo $[3, 4]$, é zero.

b) Do facto de a taxa de variação média da função a , no intervalo $[3, 4]$, ser zero, podemos concluir que a função a é constante no intervalo $[3, 4]$? Justifique a sua resposta.

c) Atendendo ao orçamento existente, pretende-se que a zona relvada tenha a maior área possível. Determine o valor de x para que tal aconteça.

(1ª fase)

16. Numa determinada região do interior, as chuvas torrenciais causaram inundações, e a região foi considerada zona de catástrofe. Os prejuízos acentuaram-se muito nas actividades agrícolas. Para enfrentar esta situação, os organismos ligados aos serviços agro-pecuários decidiram adquirir rações para animais. Foram pedidos, com urgência, dois tipos de ração: FarX e FarY. A FARJO é uma fábrica especializada na produção destes tipos de ração. Estas rações contêm três aditivos: vitaminas, sabores e conservantes. Por cada tonelada de ração do tipo FarX, são necessários dois quilogramas de vitaminas, um quilograma de sabores e um quilograma de conservantes. Por cada tonelada de ração do tipo FarY, são necessários um quilograma de vitaminas, dois quilogramas de sabores e três quilogramas de conservantes. A FARJO dispõe, diariamente, de 16 quilogramas de vitaminas, 11 quilogramas de sabores e 15 quilogramas de conservantes. Estas são as únicas restrições na produção destas rações. Represente por x a quantidade de ração FarX produzida diariamente, expressa em toneladas, e por y a quantidade de ração FarY produzida diariamente, expressa em toneladas.

a) É possível a FARJO fabricar, num só dia, 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY? Justifique.

b) Quais são as quantidades de ração de cada tipo que devem ser produzidas, de modo que a quantidade total de ração produzida diariamente seja máxima? Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- indique os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

(2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (2009)

17. A BRUGÁS é uma empresa que processa uma variedade de gás usada na confecção de um produto para aquecimento. Este produto é classificado em dois tipos: PPremium e PRegular. Em cada semana, a BRUGÁS recebe 24m^3 de gás e dispõe de 45 horas para os processar. Por motivos técnicos, as variedades de gás não podem ser processadas em simultâneo. A produção de cada tonelada de PPremium:

- requer 3 m^3 de gás;
- demora 5 horas;
- gera um lucro de 1600 euros.

A produção de cada tonelada de PRegular :

- requer 2 m^3 de gás;
- demora 5 horas;
- gera um lucro de 1200 euros.

Devido a problemas relacionados com o armazenamento, a empresa só pode produzir até 5 toneladas de PRegular. Represente por x o número de toneladas de PPremium produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS. Represente por y o número de toneladas de PRegular produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS. Quantas toneladas de PPremium e de PRegular devem ser produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS, para que o lucro semanal seja máximo? Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique a função objectivo;
- indique as restrições do problema;
- represente, graficamente, a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- calcule os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

(1ª fase)

18. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em mg/l , t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por $C(t) = 2te^{-0,3t}$ ($t \geq 0$).

- a) Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

b) Determine a que horas se verificou a concentração máxima. Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

(Matemática A - 1ª fase (adaptado))

19. Numa vila, o presidente da Junta de Freguesia vai inaugurar um mural rectangular na praça principal. Nesse mural, será exposta uma tapeçaria. No projecto, ilustrado na figura 4, o mural está representado pelo rectângulo maior, e a tapeçaria pelo rectângulo menor, sombreado; x representa a medida, em metros, de um dos lados do mural. Cada um dos lados da tapeçaria ficará paralelo a dois dos lados do mural, com margens de $0,5\text{ m}$ e de 1 m , como a figura ilustra. O mural terá 26 m de perímetro.

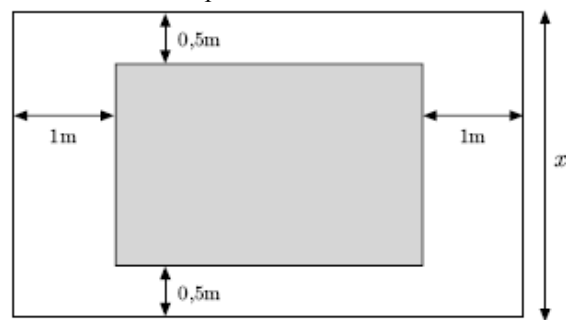


Fig. 4

a) Mostre que as medidas, em metros, de dois lados não paralelos da tapeçaria, expressas em função de x , com $x \in]1, 11[$, são dadas por $x - 1$ e $11 - x$.

b) Mostre que a área da tapeçaria, A , em metros quadrados, em função de x , é dada por $A(x) = -x^2 + 12x - 11$, $x \in]1, 11[$.

c) Determine o valor de x , com $x \in]1, 11[$, para o qual a área da tapeçaria é máxima.

(2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (2010)

20. A CADTEL é uma cadeia de grandes hotéis e possui dois hotéis, numa certa região, distanciados alguns quilómetros um do outro: o VISTASERRA e o VISTAMAR. Estes dois grandes hotéis diferem no modo de funcionamento e na especificidade dos serviços que prestam aos seus clientes. A disponibilidade de quartos é a seguinte:

- VISTASERRA: 500 quartos;
- VISTAMAR: 600 quartos.

Cada hotel tem a sua equipa fixa de trabalhadores. Além destes, a CADTEL dispõe de uma bolsa comum de recursos humanos, formada por trabalhadores que desempenham funções em qualquer dos dois hotéis, de acordo com as necessidades de serviço de cada hotel. Admita que, por cada dezena de quartos ocupados, por noite, em cada hotel, é necessário recrutar, na bolsa comum, os seguintes trabalhadores:

	Recepcionistas	Empregados de bar	Funcionários do serviço de quartos
VISTASERRA	2	1	4
VISTAMAR	1	2	3

Entretanto, uma epidemia fez adoecer alguns trabalhadores da bolsa comum da CADTEL e, nestas circunstâncias, a disponibilidade de recursos humanos desta bolsa é a seguinte:

- 100 recepcionistas;
- 120 empregados de bar;
- 210 funcionários do serviço de quartos.

Designe por x o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA, e por y o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR. Qual deverá ser, nas condições referidas, face aos recursos humanos disponíveis, o número de quartos ocupados, por noite, no VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no VISTAMAR, de modo a que seja máximo o número total de quartos ocupados, por noite, no conjunto dos dois hotéis? Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objectivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- determinar o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR correspondentes à solução do problema.

(2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (2011)

21. A Jalur é uma empresa que produz, artesanalmente, janelas de estilo antigo para o mercado de uma certa região. O gestor da Jalur sabe que a empresa consegue vender, nesse mercado, todas as janelas que produzir. As janelas de estilo antigo produzidas pela Jalur são de dois tipos: Tipo I e Tipo II. Sabe-se que:

– para produzir uma janela do Tipo I, são necessárias uma hora na secção de corte, três horas na secção de polimento e duas horas na secção de acabamentos;

– para produzir uma janela do Tipo II, são necessárias uma hora na secção de corte, duas horas na secção de polimento e uma hora na secção de acabamentos;

– as secções de produção da Jalur têm, semanalmente, a seguinte disponibilidade:

- secção de corte: 16 horas;
- secção de polimento: 36 horas;
- secção de acabamentos: 22 horas.

O lucro que a Jalur obtém ao vender uma janela do Tipo I é 30 euros, e o que obtém ao vender uma janela do Tipo II é 25 euros. Designe por x o número de janelas do Tipo I produzidas, semanalmente, pela Jalur, e designe por y o número de janelas do Tipo II produzidas, semanalmente, pela Jalur.

a) É possível a Jalur produzir um total de 15 janelas de estilo antigo, numa semana? Justifique a sua resposta.

b) Determine quantas janelas do Tipo I e quantas janelas do Tipo II deve a Jalur produzir, semanalmente, para, nas condições referidas, obter o lucro máximo. Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objectivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- calcular o número de janelas do Tipo I e o número de janelas do Tipo II que a Jalur deve produzir, semanalmente, correspondentes à solução do problema.

(1ª fase)

22. Numa determinada região, existe um lago natural onde foram efectuadas descargas de resíduos poluentes. Uma associação ambientalista detectou que a concentração, na água desse lago, de uma determinada substância poluente era muito elevada, o que punha em risco a sobrevivência de algumas espécies aí existentes, entre as quais a truta.

a) No início do ano de 1995, começaram a ser implementadas diversas medidas para diminuir a concentração da substância poluente e, assim, melhorar a qualidade da água desse lago. Admita que a concentração da substância poluente, C , em miligramas por metro cúbico de água, t anos após o início do ano de 1995, é dada por

$$C(t) = \frac{600}{0,16t^2 - 0,8t + 6} \quad \text{para } t \geq 0$$

a) Determine o ano em que a concentração da substância poluente existente na água do lago ficou reduzida a metade do seu valor inicial.

b) Existe um único instante em que a taxa de variação instantânea da função C muda de sinal, passando de positiva a negativa. Interprete, no contexto do problema, o significado desse instante.

(2ª fase)

23. A dimensão da população residente num certo concelho, criado em meados do século XIX, tem variado ao longo do tempo, reflectindo alterações das condições socioeconómicas, variações da taxa de natalidade e diferentes fluxos migratórios. O teatro municipal foi inaugurado na data da constituição do concelho. Admita que, do início do ano de 1900 ao início do ano de 2010, o número, P , em milhares, de habitantes desse concelho é dado, aproximadamente, em função do tempo, t , em anos, decorrido desde o início do ano de 1900, por

$$P(t) = 7 + 0,25 \times 2^{-0,1t} \times (0,0001t^4 - 0,1t^2 + 30) \quad \text{com}$$

$$0 \leq t \leq 110$$

a) Determine, de acordo com o modelo apresentado, o número total de anos em que o número de habitantes do concelho esteve compreendido entre 8000 e 12 000. Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

b) Na Figura 5, que não está à escala, apresenta-se um esboço do gráfico da função Q . Esta função dá, em milhares de habitantes por ano, a taxa de variação instantânea da função P no instante t . Tal como a figura ilustra, 23,2 e 65,2 são os valores, arredondados às décimas, dos zeros da função Q .

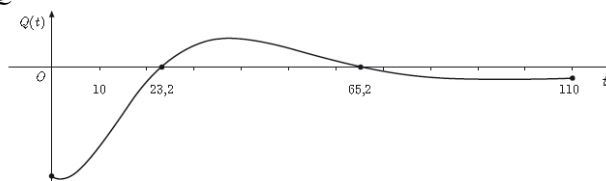


Figura 5

De acordo com o modelo apresentado, o número de habitantes do concelho foi diminuindo, até atingir um mínimo no ano de 1923. A partir daí, o número de habitantes foi aumentando, até atingir um máximo no ano de 1965. Justifique a ocorrência desse mínimo e a ocorrência desse máximo, com base na relação existente entre o sinal da função Q e a monotonia da função P .

(fase especial)

Soluções: 1. B	2. 5,4	3. 7,97; 3,07	4. 80 e 80	5. Não; 22,5 e 5	6.]0;4,5] e]0,3]; 4 e 64; 3 e 108; 120 e 54	
7. não; 10 e 4	8.]0,1[; 0,58 e 0,84; 4	9. 0,44	10. 152,1 e 147,1; 147,7	11. -0,04	12. 2,57	13. 20 e 20
15. não; 0; não; 3,5m	16. Sim; 7 e 2	17. 6 e 3	18. 0; 12h20'	19. 6	20. 120 e 540	21. 4 e 12
22. 2004; maximizante	23. 88					