Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

Matemática B – 12.º ano

Modelos discretos. Sucessões

Exercícios saídos em Provas Globais (ESAAS-11.º ano)

1. Os números triangulares (nome dado pelos pitagóricos) são dados pela sucessão cujo termo geral é $t_n=\frac{n^2+n}{2}$.

a) Calcule o 2º número triangular.

b) Verifique se 780 é um número triangular e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

(Prova Global 95)

2. Um segredo é divulgado da seguinte maneira: no princípio, apenas uma pessoa o sabe mas, a cada 15 minutos que passa, fica a sabê-lo o dobro das pessoas que o sabiam anteriormente. Quantas pessoas saberão o referido segredo após 5 horas?

(Prova Global 95)

3. Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n=\frac{5n-7}{2}$.

a) Mostre que se trata de uma progressão aritmética e indique a razão.

b) Calcule a soma dos 100 primeiros termos da sucessão.

(Prova Global 95-2ªchamada)

4. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=\frac{2-n}{5}$.

a) Prove que (u_n) é uma progressão aritmética.

b) Determine a soma dos 20 primeiros termos de (u_n).

c) Indique o primeiro termo de (u_n) que verifica a condição $u_n<-6$.

(Prova Global 96)

5. O sr. Vivaço quer comprar um carro que custa 2295 contos. O stand propõe que o pagamento seja feito em 8 prestações de acordo com a seguinte regra: a segunda prestação será o dobro da primeira, a terceira o dobro da segunda e assim sucessivamente. Calcule quanto pagará o sr. Vivaço na 1ª prestação.

(Prova Global 96)

6. Alguns tipos de células reproduzem-se por bipartição, isto é, cada uma delas divide-se em dois, dando cada uma das metades origem a um nova célula completa. Em condições ideais a bipartição dá-se de 4 em 4 horas. Sabendo que inicialmente existiam 50 células, quantas existirão ao fim de 24 horas?

(A) 1600 (B) 3200 (C) 1200 (D) 3000

(Prova Global 97)

7. O chefe de um bar aumenta o ordenado dos seus empregados segundo a fórmula $S_n = S \times 1{,}05^n$, sendo S o salário actual e S_n o salário daqui a n anos.

a) Um empregado que aufere um vencimento de 80 contos, quanto é que receberá daqui a 5 anos?

b) Justifique que a sucessão (S_n) é uma progressão geométrica, indicando a sua razão.

(Prova Global 97-2ªchamada)

8. Seja (u_n) uma sucessão de números reais cujo termo geral é $u_n=½ - n$. Qual é a proposição verdadeira?

(A) (u_n) é uma progressão aritmética de razão –1

(B) (u_n) é uma progressão geométrica de razão ½

(C) (u_n) não é uma progressão (nem geométrica nem aritmética)

(D) (u_n) é simultaneamente uma progressão aritmética e geométrica

(Prova Global 98)

9. O sr. Júlio foi multado 5 vezes porque não usava o cinto de segurança quando conduzia o seu carro. Como se tratava de uma reincidência na infracção, o valor de cada multa foi o dobro do valor da anterior. A última multa que pagou foi de 80.000$00 (a 5ª multa). Quanto pagou ao todo em multas?

(Prova Global 98)

10. Uma harpa (instrumento triangular, de cordas, dedilhado com as duas mãos) deverá ser construída com 13 cordas equidistantes umas das outras, mas de diferentes comprimentos. O comprimento da corda menor é 0,6 m. Sabendo que os comprimentos das cordas são os primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 0,1, determine o comprimento total de corda que constitui uma harpa.

(Prova Global 98-2ªchamada)

11. Considere a sucessão de figuras seguinte, em que cada figura é formada por um conjunto de fósforos:

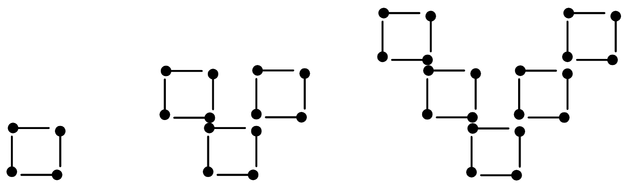


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Supondo que todos os termos da sucessão seguem a mesma lei de formação, indique, justificando, o número de fósforos necessários para a figura 10.

b) Sendo $(\mathbf{F_n})$ o número de fósforos para construir a n-ésima figura, mostre que $\mathbf{F_n} = 8\mathbf{n} - 4$.

c) Quantos fósforos são precisos para construir todas as primeiras 50 figuras?

(Prova Global 99)

12. A nova empresa de comunicações móveis TMCELIUS tem dois pacotes em promoção, o PLUS e o RISO. No PLUS o utente paga 30$00 por minuto. No RISO o utente paga 80$00 no primeiro minuto mais 20$00 por minuto a partir do primeiro. A Dona Bilharda pretende comprar um telemóvel na TMCELIUS mas não sabe qual dos pacotes deve escolher. Para efectuar um estudo, resolveu simular quantos minutos poderá falar, em média, em cada um dos sistemas.

Atenção: Para simplificar o estudo, considerou que só falaria minutos inteiros.

16. Observe a sequência de figuras:

a) Qual será o custo da chamada, se a Dona Bilharda falar 8 minutos com o pacote PLUS?

b) Qual dos pacotes é mais vantajoso, se falar 5 minutos?

c) Construindo um gráfico representativo das duas situações, determine a partir de quantos minutos é mais vantajoso o sistema RISO.

d) Justifique que a sucessão do custo das chamadas, no sistema RISO, é uma progressão aritmética e determine o termo geral desta sucessão.

(Prova Global 2000)

13. Em Abril de 1974, um litro de gasolina custava 11\$00. A inflação média nestes últimos 26 anos foi mais ou menos de 10%. Seguindo esta taxa, hoje em dia um litro de gasolina deveria custar (aproximadamente):

(A) 39\$00 **(B)** 286\$00 **(C)** 1201\$00 **(D)** 131\$00

(Prova Global 2000-2ªchamada)

14. O gerente de um hipermercado pretende promover uma determinada marca de atum em lata. Para isso, vai dispor as embalagens em 25 círculos concêntricos (uns em cima dos outros) da seguinte forma: no círculo maior (base), serão necessárias 450 latas; cada círculo a seguir deverá ter menos 15 embalagens do que o círculo anterior e assim sucessivamente. Quantas embalagens serão necessárias?

(Prova Global 2000-2ªchamada)

15. Uma empresa apresenta a um candidato 2 contratos a iniciar em 01/01/2001.

Contrato A: salário mensal de 100 contos e um aumento anual de 15 contos

Contrato B: salário mensal de 100 contos e um aumento anual de 12%

a) Qual o valor dos salários mensais em 2003, para cada contrato?

b) Escreva as expressões que dão os valores dos salários mensais no ano n.

c) Qual o 1º ano em que a escolha do contrato B beneficia o empregado? (sugestão: construa um gráfico representativo das 2 situações)

(Prova Global 2001)

a) Quantos círculos tem em cada uma das 5 primeiras figuras da sequência? Justifique.

b) Determine o termo geral da sucessão.

c) Haverá alguma figura da sequência com 215 círculos? Porquê?

(Prova Global 2001-2ªchamada)

17. O termo geral da sucessão $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}...$ é:

A) $u_n = \frac{n}{n+1}$ B) $u_n = \frac{1}{n+1}$

C) $u_n = \frac{1}{n+2}$ D) $u_n = \frac{1}{2n}$

(Prova Global 2002)

18. No dia do aniversário dos seus 13 anos, a Juvência vai começar a fazer algumas poupanças. Assim, ela vai pôr € 100 num mealheiro novo e em cada mês, ela irá guardar € 7.

a) Designando por (u_n) a sucessão que representa o dinheiro poupado, em Euros, pela Juvência após n meses, justifique que $u_n = 7n + 100$

b) A Juvência prevê viajar quando acabar o 12.º ano. Na altura, ela terá, precisamente, 17 anos. Quantos Euros terá ela amealhado nessa altura?

c) Qual será a idade da Juvência quando ela tiver amealhado, num mês e com este sistema de poupança, um valor superior a € 1000?

(Prova Global 2002)

19. Considere a sucessão definida por recorrência:
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

a) Prove que (u_n) é uma progressão aritmética, indique a razão e escreva o seu termo geral.

b) Calcule a soma dos 30 termos a partir do quinto termo (inclusive) da progressão (u_n).

(Prova Global 2002-2ªchamada)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - *2006*)

20. Considere o seguinte problema: A tia Beta ofereceu, como prenda de Natal, um mealheiro a cada um dos seus sobrinhos, João e André. No mealheiro do João, a tia colocou 20 euros. No mealheiro do André, a tia colocou 1 cêntimo. Ficou combinado que estes mealheiros eram para guardar, exclusivamente, o dinheiro que, todos os meses, a tia Beta ia oferecer a cada um destes sobrinhos. Ao João, a tia Beta deu 50 euros por mês. Assim, ao fim de um mês, o João ficou com 70 (20+ 50) euros; ao fim de dois meses, o João ficou com 120 (20 + 50 + 50) euros; etc. Ao André, a tia Beta deu, em cada mês, o dobro da quantia oferecida no mês anterior. Assim, ao fim de um mês, o André ficou com 3 (1 + 2) cêntimos; ao fim de dois meses, o André ficou com 7 (1 + 2 + 4) cêntimos; etc. Ao fim de quantos meses terá o André ficado com mais dinheiro no mealheiro do que o João?

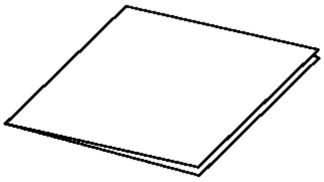
Traduza este problema por uma inequação e, recorrendo à sua calculadora, resolva-a.

(Exemplos Gave)

21. Quando se dobra uma folha de papel ao meio, a espessura duplica.

- Traduzir o problema proposto por uma inequação.
- Resolver a inequação e responder à questão colocada.

(Exemplos Gave)



Ao dobrar a folha novamente ao meio, a espessura volta a duplicar.

Admita que tem uma folha de papel com meio milímetro de espessura e imagine que é possível dobrá-la ao meio tantas vezes quantas se queira. Quantas dobragens serão necessárias para que a espessura da folha ultrapasse a distância da Terra à Estrela Polar? Para resolver este problema, deve ter em conta que a distância da Terra à Estrela Polar é de 680 anos-luz (um ano-luz é a distância que a luz percorre num ano, à velocidade de 300 mil quilómetros por segundo).
Sugere-se que percorra as seguintes etapas:
- Determinar a distância da Terra à Estrela Polar, em milímetros, apresentando o resultado na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10, arredondado às milésimas (considere 1 ano=365,25 dias).
- Determinar a expressão que dá a espessura, em milímetros, da folha de papel, ao fim de n dobragens.

22. Numa festa de aldeia, foi montado um palco para a realização de um espectáculo. Em frente deste, colocou-se uma plateia, com um total de 465 cadeiras, dispostas em filas. Em cada fila, as cadeiras foram encostadas umas às outras, sem intervalos entre elas. A primeira fila tem 10 cadeiras e a última fila tem 52 cadeiras. A segunda fila tem mais k cadeiras do que a primeira. A terceira fila tem também mais k cadeiras do que a segunda, e assim sucessivamente. Cada fila tem, portanto, mais k cadeiras do que a anterior.
a) Mostre que a plateia tem 15 filas.
b) Determine o valor de k.

(Exame 1ª fase)

23. A Ana e a Fátima têm de ler, para a disciplina de Português, um livro com 255 páginas numeradas, da página 1 (primeira página do livro) à página 255 (última página do livro). As duas raparigas começam a ler o livro no mesmo dia, na página 1. A Ana lê uma página no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, lê o dobro do número de páginas do dia anterior. A Fátima lê três páginas no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, lê mais duas páginas do que no dia anterior.
a) Verifique que, ao fim de n dias, a Ana já leu $2^n - 1$ páginas e a Fátima já leu $n^2 + 2n$ páginas.
b) Admita que a Ana acaba de ler o livro no dia 18 de Abril. Em que dia acaba a Fátima de ler o livro? Justifique a sua resposta.

(Exame 2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (2007)

24. O Pedro foi juntando algumas economias e, neste momento, tem 1000 euros que decide colocar no banco, constituindo uma poupança. Para o efeito dispõe de duas opções:
Opção A: Por cada ano de aplicação do capital, o Pedro recebe 40 euros de juros.
Opção B: Por cada ano de aplicação do capital, o Pedro recebe juros à taxa anual de 3,5%, a incidir sobre o capital total acumulado até à data.
a) Relativamente à opção B, designe por (b_n) a sucessão cujos termos são os valores do capital existente decorridos n anos. Sabendo que (b_n) é uma progressão geométrica, determine a razão. Justifique a sua resposta.
a) Comente a seguinte afirmação: «Comparando as duas opções apresentadas, se nos primeiros anos a opção A é a melhor escolha, a partir de certa altura a opção B torna-se mais vantajosa.»
Sugestão: Determine o ano a partir do qual o capital acumulado de acordo com a opção B é superior ao capital acumulado caso se tivesse escolhido a opção A. Poderá ser útil ter em atenção que $b_n = 1000 \times 1{,}035^n$

(1ª fase)

25. A evolução da massa salarial de um conjunto de trabalhadores é, por vezes, explicável através de modelos matemáticos. Numa dada empresa, fez-se um estudo comparativo da evolução dos vencimentos (em euros) de dois trabalhadores, A e B, entre 1998 e 2006. Relativamente ao trabalhador B, sabe-se que, em 1998, recebia mensalmente 652 euros e que, nos anos seguintes, referentes ao período em estudo, o valor do seu vencimento mensal pode ser obtido através do modelo $v_n = 652 \times 1{,}0502^{n-1}$
Nota: a variável n está associada aos anos relativos ao período em estudo, concretamente, n=1 corresponde a 1998, n=2 corresponde a 1999, etc. Tome em atenção que o modelo que traduz a evolução do salário do trabalhador B é uma progressão geométrica.
a) Indique o primeiro termo e a razão da progressão geométrica em questão.
b) Um trabalhador aufere, por ano, 12 ordenados mensais mais o subsídio de férias e o décimo terceiro mês, ambos com valor igual ao do ordenado mensal. Utilizando a fórmula apropriada (que faz parte do formulário), calcule, aproximadamente, o valor da totalidade dos vencimentos auferidos pelo trabalhador B entre 1998 e 2006, inclusive. Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2ª fase)

26. O Dino e a Custódia compraram vários discos compactos.
a) Foi no dia 1 de Agosto que a Custódia comprou treze discos. Sabendo que ela passou a comprar, a cada dia que

Na primeira semana, ele guardou 3 euros e, em cada semana que passou, o Dino passou a guardar o dobro do dinheiro. Determine a quantia acumulada pelo Dino ao fim de 12 passou, mais dois discos que no dia anterior, em que dia ela comprou 49 discos de uma só vez?

b) O Dino costumava guardar, semanalmente, uma certa quantia em dinheiro para poder comprar discos compactos.

semanas.

(Escola)

Exercícios saídos em Exames (*2008*)

27. Thomas Malthus, pensador do século XVIII, elaborou um modelo para prever a evolução da população mundial. De acordo com este modelo, a população mundial <u>duplicaria</u>, de 25 anos em 25 anos. Considerando que, no ano de 1900, a população mundial era de 1,65 mil milhões de pessoas, estime, de acordo com o Modelo de Malthus, qual teria sido o valor da população mundial em 2000. Apresente o resultado em milhares de milhões, arredondado às unidades.

(1ª fase)

28. Numa pequena cidade foi colocado, em lugar de destaque, um painel publicitário alusivo às ofertas turísticas da região. Um gabinete de publicidade turística está a projectar um painel no qual figuram dez circunferências com o mesmo centro. Conforme o projecto, a primeira circunferência terá 3 metros de raio, a segunda terá 3,10 metros de raio e assim sucessivamente, de acordo com uma progressão aritmética de razão 0,10 metros.

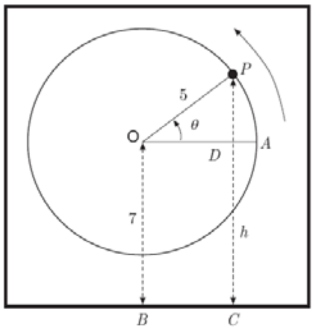


Fig. 3

Com o objectivo de fazer realçar o painel, à noite, pretende-se que cada uma destas dez circunferências fique coberta com fio luminoso. Quantos metros de fio luminoso serão necessários para executar o projecto? Apresente o resultado arredondado às centésimas. Nos valores intermédios, use sempre, pelo menos, três casas decimais.

(2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (*2009*)

29. Numa feira de agricultura, o Sr. Pedro, negociante de cavalos, pedia por um cavalo puro-sangue a quantia de 4 000 000 de euros. O Sr. João estava muito interessado em comprar o cavalo, mas considerava o preço muito elevado. O Sr. Pedro propôs-lhe, então, o seguinte negócio: «O cavalo tem 4 ferraduras, e cada uma delas tem 8 cravos. O Sr. João dá-me um <u>cêntimo</u> pelo primeiro cravo da ferradura da pata dianteira esquerda; dois cêntimos pelo segundo cravo da mesma ferradura, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até ao oitavo cravo dessa ferradura, pelo qual me dá 1,28 euros.» «Repare: pelos oito cravos da ferradura desta pata, o Sr. João paga-me 2,55 euros. Barata a feira! Continuemos para os outros cravos. Pelo primeiro cravo da pata dianteira direita, o Sr. João dá-me 2,56 euros, isto é, o dobro do valor do oitavo cravo da pata dianteira esquerda, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até se terem esgotado os 32 cravos das ferraduras do cavalo.» «O sr. João aceita pagar-me, por este cavalo, a quantia total do valor dos cravos das ferraduras?»

a) Verifique que o valor total dos cravos da ferradura da pata dianteira esquerda é de 2,55 euros, tal como o Sr. Pedro refere.

b) Mostre que, de acordo com a proposta do Sr. Pedro, o valor a pagar pelo cavalo é superior a 4 000 000 de euros.

(1ª fase)

30. Na figura 2, está representado um quadrado [ABCD], cujos lados têm comprimento *l*. Em cada um dos lados do quadrado, assinalou-se o respectivo ponto médio. Unindo os pontos médios, obteve-se o quadrado [PQRS]. Um joalheiro criou uma colecção de peças numeradas (I, II, III, ...), com faces quadradas, de 4 centímetros de lado. Na figura 3, que não está à escala, estão representados apenas os três primeiros exemplares dessa colecção.

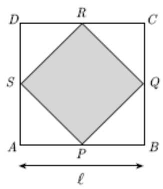


Fig. 2

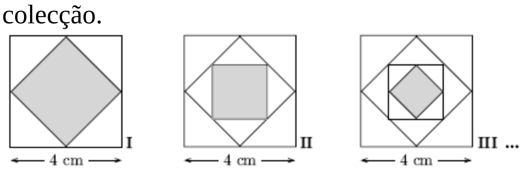


Fig. 3

• cada peça contém uma pedra preciosa, cuja face visível também tem a forma de um quadrado, representado pela <u>região sombreada</u>. Tal como a figura 3 sugere, a dimensão da pedra preciosa vai diminuindo ao longo da colecção;

• de cada peça para a seguinte, o joalheiro aplicou ao quadrado central o processo ilustrado na figura 2;

• a face visível da pedra preciosa, de menor dimensão, é um quadrado de 0,25 cm2 de área.

Considere a sequência das <u>áreas</u>, em cm^2, das faces visíveis das pedras preciosas utilizadas nesta colecção de peças.

Determine a <u>soma</u> das áreas das faces visíveis das pedras preciosas de toda a colecção.
<u>Sugestão</u>: Comece por mostrar que 8 é o primeiro termo da sequência referida.

(2ª fase)

31. Um artesão construiu uma sequência de bonecas, inspirando-se em bonecas da Rússia, popularmente conhecidas por *Matrioshkas*. Todas as bonecas são ocas, à excepção da menor, que é a primeira da sequência. A boneca menor pode ser colocada dentro da segunda boneca, que, por sua vez, pode ser colocada dentro da boneca seguinte, e, assim sucessivamente, até à boneca maior. A figura 6, que não está à escala, apresenta apenas as cinco primeiras bonecas da sequência colocadas da esquerda para a direita, por ordem crescente de alturas.

Fig. 6

A altura da boneca menor é de 2 cm. A diferença de alturas entre duas bonecas consecutivas é sempre igual a 1,8 cm.

a) Na sequência completa, existe uma boneca cuja altura é de 11 cm. Essa boneca não está representada na figura 6. Determine a posição dessa boneca na sequência.

b) Somaram-se as alturas de todas as bonecas da sequência completa e obteve-se o valor exacto de 142,8 cm. Calcule o número total de bonecas da sequência.

(especial)

Exercícios saídos em Exames (*2010*)

32. A gerência de um hotel de uma zona turística encomendou a um artista plástico um painel decorativo. O painel será composto por uma sequência de dez telas quadradas, espaçadas entre si, todas com 12 decímetros de lado e com diferentes pinturas. A Figura 1 representa as três primeiras telas dessa sequência, ordenadas da esquerda para a direita.

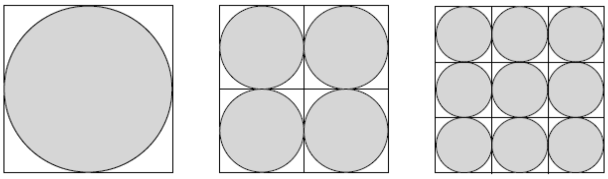


Figura 1

O artista pintou as telas de acordo com o seguinte processo:

• na primeira tela, pintou o círculo inscrito;

• dividiu a segunda tela em quatro quadrados geometricamente iguais, nos quais pintou os quatro círculos inscritos, tal como se vê na figura;

• dividiu a terceira tela em nove quadrados geometricamente iguais, nos quais pintou os nove círculos inscritos, tal como se vê na figura;

• e assim sucessivamente, até à décima tela.

a) Mostre que a área do círculo pintado na primeira tela é igual à soma das áreas dos círculos pintados na segunda tela.

b) Determine o número de círculos pintados na décima tela do painel.

(1ª fase)

33. Uma autarquia, no aniversário do município, irá inaugurar um novo edifício dos paços do concelho e, no âmbito das comemorações, pretende realizar algumas iniciativas culturais. A autarquia encomendou a uma empresa de tecelagem o fabrico de uma tapeçaria de grandes dimensões, para decorar o salão nobre do novo edifício dos paços do concelho. A Figura 1 representa, esquematicamente, o projecto da parte central da tapeçaria.

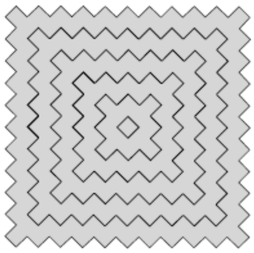


Figura 1

A Figura 2 representa, ordenadamente, os quatro primeiros elementos da sequência finita de linhas poligonais fechadas, utilizada no projecto de concepção da tapeçaria. Ao longo de toda a sequência, que tem mais de 30 elementos, de cada linha poligonal para a seguinte, o número de lados aumenta de forma constante. Tal como se pode observar na Figura 2, as linhas poligonais I, II , III e IV têm, respectivamente, 4, 20, 36 e 52 lados.

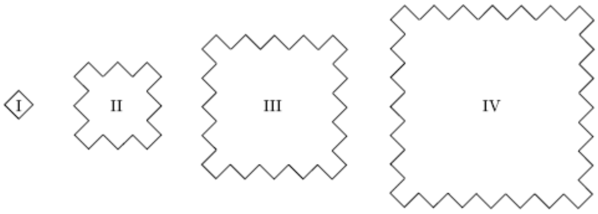


Figura 2

a) Mostre que, nesta sequência, nenhuma das linhas poligonais tem 456 lados.

b) Ao longo da sequência, o comprimento de cada um dos lados de qualquer linha poligonal mantém-se constante, sendo sempre igual a 1 centímetro. Determine o número mínimo de elementos consecutivos desta sequência que é necessário considerar, incluindo o primeiro, para que a soma dos comprimentos das respectivas linhas poligonais seja superior a 32 metros.

(2ª fase)

34. Foi pedido a um artista plástico que projectasse um mural rectangular, com 10 metros de comprimento e 6,20 metros de altura, em homenagem a J. Monteiro da Rocha, um grande astrónomo português do séc. XVIII. A Figura 1, que não está à escala, representa um esquema da vista de frente do mural.

O artista pretende dispor 31 tiras de alumínio, justapostas, de acordo com o que sugere a Figura 1. Considera-se desprezável a espessura de cada tira de alumínio.

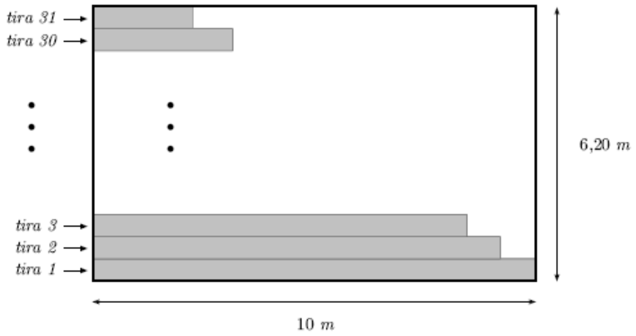


Figura 1

Todas as tiras têm 20cm de altura e apenas variam no comprimento:

• a tira 1, colocada na base, tem 10m de comprimento;
• a tira 2, colocada imediatamente acima da tira 1, tem menos 30cm de comprimento que a tira 1
• a tira 3, colocada imediatamente acima da tira 2, tem menos 30cm de comprimento que a tira 2
• e assim sucessivamente, tendo cada tira menos 30cm de comprimento que a tira precedente, até à tira 31, que tem 1m de comprimento.

a) Determine a área do mural, em metros quadrados, que será ocupada pelas 31 tiras.

b) Mostre que o comprimento, em metros, da tira n, para n $\in \{1, \dots, 31\}$, é dado pela expressão 10,3–0,3n

(especial)

Exercícios saídos em Exames (*2011*)

35. Na edição de 2010 da feira anual, a organização do jogo Roda da Fortuna limitou o número total de inscrições no jogo. Estipulou que, em cada dia de feira, haveria, no máximo, mais 8 inscrições do que no dia anterior. No final da feira desse ano, a organização revelou que, no primeiro dia, houve 6 inscrições no jogo Roda da Fortuna e que, nos restantes dias, se esgotou o número de inscrições estipulado para cada um dos dias.

a) Determine o número de inscrições feitas no décimo dia da feira anual de 2010.

b) Admita que, nos dois últimos dias da feira anual de 2010, houve um total de 340 inscrições na Roda da Fortuna. Determine o número de dias que durou a feira anual de 2010.

(1ª fase)

36. A Figura 5 representa uma gravura intitulada *Divisão Regular de Superfície*, da autoria de M. C. Escher. A Figura 6 representa uma versão simplificada de parte do diagrama de suporte usado por Escher na elaboração da gravura, na qual se observam várias linhas de quadrados.

In Bruno Ernst, *O Espelho Mágico de M. C. Escher*, Taschen, 1991

Figura 5

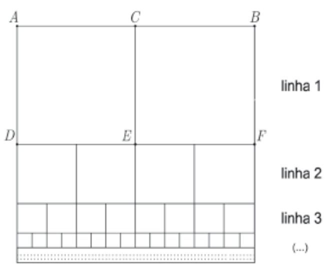


Figura 6

A partir de um segmento de recta [AB], constroem-se dois quadrados geometricamente iguais, [ACED] e [CBFE], obtendo-se a linha 1 de quadrados. Repete-se o processo, sucessivamente, de modo a obter novas linhas de quadrados, como sugere a Figura 6. Admita que:

• $\overline{AB} = 8$ dm
• a linha 1 é constituída por 2 quadrados com 4dm de lado;
• a linha 2 é constituída por 4 quadrados com 2dm de lado;
• de cada linha para a linha seguinte, o número de quadrados duplica e o comprimento do lado de cada quadrado diminui para metade. Admita, também, que se podem obter tantas linhas de quadrados quantas se queira. Considere a sucessão (a_n), cujo termo de ordem n dá a área total, em dm^2, dos quadrados que constituem a linha *n*. Nesta sucessão, o primeiro termo, que corresponde à área total dos quadrados da linha 1, é 32 e o segundo termo, que corresponde à área total dos quadrados da linha 2, é 16

a) Mostre que a área ocupada por todos os quadrados das primeiras sete linhas é exactamente $63{,}5dm^2$

b) Sempre que se acrescenta uma nova linha de quadrados, a soma das áreas de todos os quadrados, incluindo os dessa linha, aumenta. Mostre que a soma dessas áreas, por maior que seja o número de linhas de quadrados, nunca é igual a $64dm^2$

Sugestão – Na sua resposta, poderá começar por igualar a expressão da soma dos n primeiros termos da sucessão (a_n) a 64

(1ª fase)

37. Os grilos são insectos conhecidos pelo seu canto peculiar – as estridulações, sons vibrantes produzidos com as asas anteriores. Há diversos países onde se faz a criação de grilos em cativeiro com fins comerciais. No Verão, é possível estimar o valor da temperatura ambiente ouvindo as estridulações emitidas pelos grilos. Em 1897, o americano Amos Dolbear verificou experimentalmente que a frequência das estridulações dos grilos aumenta com a subida da temperatura ambiente, quando esta varia entre determinados valores. Dolbear chegou a uma relação que permite estimar, muito aproximadamente, o valor da temperatura ambiente, T, em graus Celsius (ºC), a partir do número de vezes, *n*, que um grilo canta, por minuto. Essa relação, conhecida por lei de Dolbear, é dada por $T(n) = \frac{n-40}{7} + 10$

a) Numa noite de Verão, durante 1 minuto, ouviu-se um grilo cantar 45 vezes em cada 15 segundos. Estime o valor da temperatura ambiente, em graus Celsius, naquele minuto, com base na lei de Dolbear.

b) Num dia de Verão, ao entardecer, registou-se o número de vezes que se ouviu um grilo cantar e estimaram-se, com base na lei de Dolbear, os valores da temperatura ambiente em dois períodos de tempo: das 18 horas e 15 minutos às 18 horas e 16 minutos e das 19 horas e 44 minutos às 19 horas e 45 minutos. Verificou-se que o grilo cantou menos sete vezes no segundo período de tempo do que no primeiro. Determine a diferença entre os valores estimados para a temperatura ambiente naqueles dois períodos de tempo.

(especial)

Soluções: 1. 3; 39º termo 2. 1048576 3. 12275 4. -34; -31/5; 5. 9 cts. 6. B 7. 102.103$00; 1,05
8. A 9. 155 cts 10. 15,6 m 11. 76; 10000 12. 240$00; PLUS; 20n+60 13. D
14. 6750 15. 130 e 125,440; 15n+85 e $100\times1{,}12^{n-1}$; 2007 16. 1,4,9,16,25; n^2; não; crescente 17. D 18. 436; 24
19. –4; –2130 20. 16 21. 74 22. 3 23. 25 de Abril 24. 1,035; 9.º ano 25. 652 e 1,0502; 100733
26. 19 Ago; 12285 27. 26 28. 216,77 29. 2,55 30. 15,75 31. 6; 12 32. 100
33. 21 34. 34,1 35. 78; 22 37. 30; 1

O professor: RobertOliveira