

Modelos contínuos não lineares. A exponencial e a logarítmica. A logística.

Exercícios (adaptados) saídos em Exames (Matemática A – **2001-2006**)

1. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em kg), por $A(p) = -0,52 + 0,55 \ln p$.

a) O Ricardo tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso? Apresente o resultado em kg, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 2 casas decimais.

b) Verifique que, para qualquer valor de p , a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com 2 casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

(2001 - 2ª chamada)

2. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos. Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por $A(t) = 4t^3 e^{-t}$ e $C(t) = 2t^3 e^{-0,7t}$. A variável t designa o tempo, medido em horas, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0, 12]$).

a) Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze minutos depois de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

c) Considere as seguintes questões:

1. *Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?*

2. *Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve torná-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas)

(2002 - 1ª chamada)

3. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar. Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois. Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar diminuiu, enquanto o purificador esteve ligado. Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar começou de imediato a aumentar.

Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

$$P(t) = 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}, \quad t \in [0, 24]$$

Nas duas alíneas seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

a) Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos da tarde? Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.

b) Resolva o seguinte problema:

Quanto tempo esteve o purificador de ar ligado?

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

(2003 - 1ª chamada)

4. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por $p(t) = 3,5 + \frac{6,8}{1+12,8e^{-0,036t}}$

(considere que t é medido em anos e que o instante $t=0$ corresponde ao início do ano 1864).

a) De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no final do presente ano (2003)? Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Resolva o seguinte problema: De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

(2003 - 2ª fase)

5. Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por $P(t) = 5,2 \times 10^7 \times e^{(N-M)t}$, $t \geq 0$, em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, *taxa de natalidade*

e *taxa de mortalidade* da população.

a) Supondo que $N=7,5$ e $M=7,6$, calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$ e

interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

b) No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970. Sabendo que a *taxa de natalidade* é 7,56, determine a *taxa de mortalidade*. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(2005 - 2ª fase)

6. No início de 1972, havia 400 lobos num determinado parque natural. As medidas de protecção a lobos fizeram com que o referido nº aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o nº de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado. Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o nº aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

- (A) $\frac{1000}{1+e^{-0,5t}}$ (B) $\frac{1000}{1+1,5e^{-0,5t}}$
 (C) $\frac{1200}{1+2e^{-t}}$ (D) $1000 - \frac{600(t^3+1)}{e^t}$

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras 3 expressões (apresente 3 razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).

Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtidos(s).

(2005 - 2ª fase)

7. O tempo t , medido em anos, que um planeta demora a realizar uma translação completa em torno do Sol, está relacionado com a distância média, d , desse planeta ao Sol, medida em milhões de quilómetros, por meio da fórmula $2\ln(t) = k + 3\ln(d)$ (k é uma constante real).

a) Sabe-se que: a distância média de Urano ao Sol é (aproximadamente) o dobro da distância média de Saturno ao Sol; o planeta Urano demora (aproximadamente) 84 anos a realizar uma translação completa em torno do Sol.

Determine quanto tempo demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é, aproximadamente, de 149,6 milhões de km, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às unidades).

(2005 - época especial)

8. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função $V(x) = e^{14-x}$ sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).

a) A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite. Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, justifique que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por $L(x) = (x-3)e^{14-x}$

b) Utilize a calculadora para resolver graficamente o seguinte problema:

Entre que valores deve variar o preço de um litro de azeite de venda ao público para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros? Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

(2006 - Teste Intermédio 2)

9. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo, apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sendo medida, ao longo do decorrer da experiência. Admita que: neste laboratório, a temperatura ambiente é constante; a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente;

depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente. Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo t , contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções, a , b , c e d , definidas a seguir:

$$a(t) = \begin{cases} 24 - 2t & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 - 10e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 70e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 14(t + 1) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$d(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

Qual das quatro funções é a correcta? Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

(2006 - Teste Intermédio 2)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2006)

10. Numa aula de laboratório de Matemática, a professora propôs aos seus alunos o estudo da Lei do Arrefecimento. Para isso, propôs que aquecessem um pouco de água e que depois a deixassem arrefecer. Enquanto a água esteve a arrefecer, mediram a temperatura desta de dois em dois minutos. Os resultados das medições foram os seguintes (a variável t designa o tempo, medido em minutos; a variável T designa a temperatura, medida em graus Celsius):

| | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| T | 89,4 | 85,7 | 80,5 | 76,7 | 72,2 | 68,5 | 65,8 | 61,9 | 58,5 | 55,6 |

A professora pediu depois aos alunos que medissem a temperatura ambiente, que era de 25 graus Celsius. A professora sugeriu então que acrescentassem duas linhas à tabela anterior:

- uma para colocar os valores das diferenças entre as temperaturas da água e a temperatura ambiente ($T - 25$);
- outra para colocar os logaritmos (de base e) desses valores.

| | | | | | | | | | | |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| T | 89,4 | 85,7 | 80,5 | 76,7 | 72,2 | 68,5 | 65,8 | 61,9 | 58,5 | 55,6 |
| $T - 25$ | | | | | | | | | | |
| $\ln(T - 25)$ | | | | | | | | | | |

A partir daqui, os alunos conseguiram estabelecer uma relação entre a temperatura, T , da água e o tempo, t , à custa da qual podiam prever a temperatura da água em qualquer instante. Pretende-se que, tal como esses alunos, estabeleça uma relação entre a temperatura, T , da água e o tempo, t , e, à custa dessa relação, determine qual deverá ser a temperatura, T , da água, ao fim de meia hora.

Sugere-se que:

- Complete a tabela, apresentando os valores da última linha com três casas decimais.
- Utilizando a sua calculadora, obtenha o diagrama de dispersão relativo às variáveis t e y , sendo $y = \ln(T - 25)$, e o coeficiente de correlação linear entre as mesmas variáveis. Atendendo ao diagrama, interprete o valor do coeficiente de correlação.
- Utilizando a sua calculadora, obtenha, por regressão linear, os valores de m e de b , tais que $y = mt + b$ (aproximadamente). Apresente os valores de m e de b , arredondados às centésimas.

• Tendo em conta os valores de m e de b , obtidos, determine qual deverá ser a temperatura da água ao fim de meia hora de arrefecimento. Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às unidades.

(Exemplos Gave)

11. A Margarida, aluna do curso de Artes Visuais, pretende fazer uma composição artística num pedaço de tecido. Para isso, começou por entornar um frasco de tinta azul no tecido. Admita que a mancha produzida pela tinta sobre o tecido é um círculo cujo raio vai aumentando com o decorrer do tempo. Sabe-se que, t segundos após o frasco ter sido completamente entornado, a área (em cm^2) de tecido ocupada pela mancha é dada, para um certo valor de k , por

$$A(t) = \frac{100}{1 + 4e^{kt}}, \text{ sendo } t \geq 0$$

a) Supondo que, ao fim de cinco segundos, o raio da mancha circular é de 4 cm, determine o valor de k . Apresente o resultado arredondado às centésimas.

b) Admita agora que $k = -0,25$. Calcule a taxa de variação média da função A no intervalo $[0,4]$, apresentando o resultado arredondado às unidades. Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

(1ª fase)

12. Admita que, em condições ambientais normais, o número aproximado de aves de uma certa população, t anos após um determinado instante inicial, é dado por

$$N(t) = \frac{125A}{A + (125 - A)e^{-0,2t}} \quad (t \geq 0 \text{ e } A \text{ constante positiva})$$

a) Verifique que A é o número de aves existentes no instante inicial.

b) Ao longo dos cinco anos que se seguiram ao instante inicial, a população cresceu em condições ambientais normais. Nasceram 80 aves e morreram 57, não tendo entrado nem saído mais aves da população. Estime o número de aves que havia nessa população, no instante inicial, sabendo que esse número era inferior a 25.

(2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2007)

13. Sabe-se que a concentração, C , em miligramas por litro, de um analgésico, na circulação sanguínea, t horas após a sua ingestão, é dada por: $C(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})$

Nota: Na resolução das questões seguintes, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

a) Qual é a concentração, aproximada, do analgésico uma hora e trinta minutos após a sua ingestão? Apresente o resultado arredondado às centésimas.

b) Sabe-se que o analgésico tem o efeito desejado quando a sua concentração é superior a 0,5 miligramas por litro. Considere que o analgésico foi ingerido às nove horas. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, indique uma aproximação do intervalo em que ele produz o efeito desejado. Apresente os resultados em horas e minutos (com os minutos arredondados às unidades).

(1ª fase)

14. No período de testes que antecedeu a entrada em funcionamento de um gasómetro, com capacidade de 100 toneladas, procedeu-se ao seu enchimento, continuamente, durante 24 horas. Por razões de segurança, o gasómetro foi lastrado com 2,5 toneladas de gás, após o que se iniciou a operação de enchimento. A partir daí, o seu enchimento foi feito de acordo com o modelo: $M(t) = \frac{100}{1+39e^{-0,49t}}$, sendo $0 \leq t \leq 24$ (M representa a massa total, expressa em toneladas, existente no gasómetro t horas desde o início do seu enchimento.)

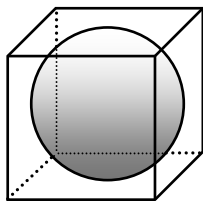
Nota: Na resolução das questões seguintes, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

a) Qual era a massa total, aproximada, existente no gasómetro 3 horas após o início do seu enchimento? Apresente o resultado arredondado às centésimas.

b) Durante o período em que decorre o enchimento do gasómetro, fará sentido afirmar que existe um dado intervalo de tempo em que a taxa de variação média do modelo assume um valor negativo? Justifique devidamente a sua resposta.

(2ª fase)

15. Considere um cubo, de aresta igual a 30 cm, e com uma esfera inscrita nele (isto é, a esfera é tangente a todas as faces do cubo).



a) Determine a distância de um dos vértices do cubo ao centro da esfera. Apresente o resultado em centímetros, arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

b) Admita que o cubo da figura representa uma caixa aberta em cima. É possível, com a esfera dentro, encher essa caixa com dez litros de água? Justifique a resposta.

Nota 1: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

Nota 2: recorde que 1 litro = 1000 cm³

(Escola-2ª fase)

16. A Antonieta comprou uma bebida gelada. Admita que, t minutos após a bebida ser servida, a sua temperatura (em graus Celsius) é dada por $f(t) = 18 - 16e^{-kt}$, sendo $t \in [0, +\infty[$ e $k \neq 0$

a) Nas duas alíneas seguintes, considere $k = -0,1$.

a₁) Suponha que a bebida da Antonieta foi servida às 13 horas. Qual deveria ser a sua temperatura às 13 horas e um quarto? Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às décimas.

Nota: se usar arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

a₂) Na sala onde a Antonieta esteve a beber, a temperatura ambiente é constante. Determine-a, explicando como o fez e interprete o valor obtido no contexto do problema.

b) Suponha agora que, após meia hora, a temperatura da bebida da Antonieta é igual a 17 graus Celsius. Nestas condições, determine o valor de k , apresentado o resultado arredondado às centésimas.

Nota: se usar arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

(Escola-2ª fase)

Exercícios (adaptados) saídos em Testes intermédios e exames

(Matemática A - 2008)

17. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes. Admita que, t anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por $f(t) = \frac{2000}{1+ke^{-0,13t}}$ onde k designa um número real.

a) Determine o valor de k , supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago.

b) Admita agora que $k = 24$. Resolva o seguinte problema: Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(Intermédio 2)

18. Considere, num referencial ortonormado xOy , os gráficos das funções f e g , de domínio $[0, 3]$, definidas por

$f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = e - e^{x-1}$ (ln designa logaritmo de base e). Determine a área de um triângulo $[OAB]$, com aproximação às décimas, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Para construir o triângulo $[OAB]$, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, no domínio indicado;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:

– a origem O do referencial; – o ponto A de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;

– o ponto B de intersecção do gráfico da função g com o eixo Ox .

(1ª fase)

19. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva. Admita que, t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por: $N(t) = \frac{2000}{1+199e^{-0,01t}}$, $t \geq 0$

Resolva os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

a) Determine $N(0)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t)$. Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

b) Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

(1ª fase)

20. Considere a função f , de domínio $] -\frac{1}{2}, +\infty[$, definida

por $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$, e a função g , de domínio \mathbb{R} , definida

por $g(x) = x - 2$. Indique as soluções inteiras da inequação

$f(x) > g(x)$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos A e B , de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

(2ª fase)

21. A massa de uma substância radioactiva diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t horas de observação, é dada pelo modelo matemático

$M(t) = 15 \times e^{-0,02t}$, $t \geq 0$. Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva? Apresente o resultado em horas e minutos, estes arredondados às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

(2ª fase)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2008)

22. A população mundial, desde 1900, evoluiu de acordo com a tabela abaixo:

| Ano | Número de pessoas (em milhares de milhões) |
|------|---|
| 1900 | 1,65 |
| 1910 | 1,75 |
| 1920 | 1,86 |
| 1930 | 2,07 |
| 1940 | 2,30 |
| 1950 | 2,56 |
| 1960 | 3,04 |
| 1970 | 3,71 |
| 1980 | 4,45 |
| 1990 | 5,28 |
| 2000 | 6,08 |

Admita que a evolução da população mundial desde 1900 é bem modelada por uma função exponencial do número de pessoas, em que a variável independente designa o número de anos após 1900. Estime a população mundial para 2010. Recorra à calculadora e utilize a regressão exponencial para determinar a expressão de uma função que se ajuste aos dados da tabela, percorrendo as seguintes etapas:

- considere o ano de 1900 como o ano zero (0), o ano de 1910 como o ano dez (10), e assim sucessivamente até ao ano de 2000 como o ano cem (100);
- escreva essa expressão (apresente os valores numéricos envolvidos na expressão e fornecidos pela calculadora, com quatro casas decimais);
- usando essa expressão, estime a população mundial para 2010 (apresente o resultado em milhares de milhões de habitantes, arredondado às centésimas).

(1ª fase)

23. Numa piscicultura, existe um tanque que tem actualmente 300 robalos. Ao serem introduzidas x trutas no tanque, a proporção $P(x)$ do número de trutas, relativamente ao número total de peixes que passam a existir no tanque, é tal que

$$P(x) = \frac{x}{300+x}$$

- a) A equação $P(x) = 1$ é impossível. Interprete esta impossibilidade no contexto da situação descrita.
- b) Pretende-se que a percentagem de trutas, relativamente ao número total de peixes, seja de 25%. Qual é o número de trutas a introduzir no tanque?

(2ª fase)

24. Sabe-se que Leonardo da Vinci (1456-1519) também se interessava por Matemática. Numa melancólica nota sobre a noite de 30 de Novembro de 1504, escreveu o seguinte, numa caligrafia regular e da direita para a esquerda (como costumava): «Na noite de Santo André, encontrei a solução para a quadratura do círculo, quando se acabavam a candeia, a noite e o papel em que estava a escrever. Terminei-a de manhã».

Durante anos e anos, procuraram-se, entre os infindáveis cadernos que nos deixou, os manuscritos contendo as reflexões feitas naquela noite. Em vão: nunca foram encontrados. Nas férias da Páscoa de 2008, o Manuel foi passar uns dias a casa dos avós. Vasculhando coisas velhas no sótão, encontrou uns papéis corroídos pelo tempo, escritos em italiano antigo e também numa caligrafia regular, da direita para a esquerda: pareciam ser o tão procurado caderno de Leonardo sobre a quadratura do círculo. Ficou espantado. Imagine que o Manuel lhe pede a si que estude a possibilidade de a autoria dos papéis ser de Leonardo da Vinci. Admita que, numa aula de Matemática B, aprendeu que a massa de carbono 14 (C_{14}), presente num artefacto desde a sua produção, é dada pela fórmula

$$y(t) = c e^{-0,000121t}$$

em que c é a massa original de C_{14} , em gramas, e t é o tempo, em anos, decorrido desde o momento da produção do artefacto. Decidiu, por isso, recorrer a um laboratório científico especializado em análises de C_{14} , que o informou do seguinte: o manuscrito contém 96% da massa de C_{14} original, ou seja, designando por c a massa de C_{14} original, a massa de C_{14} que o manuscrito contém é de $0,96c$. Com base nesta informação, redija um pequeno texto para o Manuel, no qual constem:

- a idade do papel (em número inteiro de anos);
- a data (em anos) em que terá sido fabricado;
- a conclusão quanto à possibilidade de Leonardo da Vinci ser o autor do manuscrito.

(2ª fase)

Exercícios (adaptados) saídos em Testes intermédios e exames (Matemática A – 2009)

25. Quando uma substância radioactiva se desintegra, a sua massa, medida em gramas, varia de acordo com uma função do tipo $m(t) = ae^{bt}$, $t \geq 0$, em que a variável t designa o tempo, medido em milénios, decorrido desde um certo instante inicial. A constante real b , depende da substância e a constante real a é a massa da substância no referido instante inicial.

a) O *carbono-14* é uma substância radioactiva utilizada na datação de fósseis em que esteja presente. Relativamente a um certo fóssil, sabe-se que:

- a massa de *carbono-14* nele presente, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91 g
- a massa de *carbono-14* nele presente, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58 g

Tendo em conta estes dados, determine:

- o valor da constante b , para o *carbono-14*;
- a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) O *rádio-226* é outra substância radioactiva. Em relação ao *rádio-226*, sabe-se que $b = -0,43$. Verifique que, quaisquer que sejam os valores de a e de t , $\frac{m(t+1,6)}{m(t)}$ é constante.

Determine o valor dessa constante, arredondado às décimas, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

(Intermédio 2)

26. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em mg/l, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por $C(t) = 2te^{-0,3t}$ ($t \geq 0$). Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

a) Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

b) Determine a que horas se verificou a concentração máxima. Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

(1ª fase)

27. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afectada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir. Admita que a área, em hectares, afectada pela doença, é dada, em função de t , por $A(t) = 2 - t + 5 \ln(t + 1)$ sendo t ($0 \leq t < 16$) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença. Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

a) Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afectada. Passada uma semana, a área de cultivo afectada pela doença aumentou. De quanto foi esse aumento?

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

b) Determine a área máxima afectada pela doença. Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(2ª fase)

28. Admita que a magnitude, M , de um sismo é dada, na escala de Richter, por $M = 0,67 \log E - 3,25$ sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas por dois sismos de magnitudes M_1 e M_2 , respectivamente. Determine $\frac{E_1}{E_2}$, com aproximação às unidades, sabendo que $M_1 - M_2 = 1$. Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

b) O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude 4,7, na escala de Richter. Qual foi a energia libertada nesse sismo? Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e a um número entre 1 e 10. Apresente o valor de a arredondado às unidades.

(época especial)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2009)

29. Uma águia, ao efectuar um voo planado à procura de alimento, avistou uma lebre no fundo do vale do parque natural. O fundo do vale é uma área plana. De imediato, a águia iniciou um voo picado, a grande velocidade, em direcção à presa, capturando-a em poucos segundos. Após a captura, transportou a lebre para o cimo de um penhasco, terminando aí o seu voo. O momento da captura corresponde ao instante em que a águia atingiu, no seu voo, a distância mínima ao fundo do vale. Admita que a distância, h , em metros, a que a águia se encontra do fundo do vale, t segundos após o início do voo picado, é dada, aproximadamente, por

$$h(t) = -0,125t^4 + 2,5t^3 - 12,9t^2 - 1,1t + 94,8 \text{ com } t \in [0; 9,6]$$

a) Determine o valor da taxa de variação média de h no intervalo $[0; 3]$. Apresente o resultado com aproximação às décimas. Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

b) Na figura 3, que não está à escala, apresenta-se um esboço do gráfico de f , função que dá, em metros por segundo, a taxa de variação instantânea de h no instante t . Admita que a taxa de variação instantânea de h se anula no instante $t = 5,4$. Descreva o que aconteceu no instante $t = 5,4$, no contexto da situação referida, justificando a ocorrência através da relação existente entre a monotonia de h e o sinal da respectiva taxa de variação instantânea.

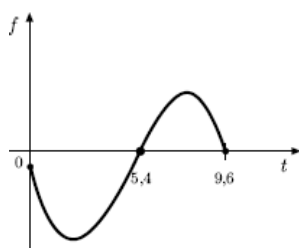


Fig. 3

(1ª fase)

30. No parque natural, foram plantadas, num certo momento, duas árvores, uma da espécie P e outra da espécie C. Admita que as alturas, em metros, da árvore da espécie P e da árvore da espécie C, x anos depois de terem sido plantadas, são dadas, aproximadamente, por $P(x)$ e $C(x)$:

$$\text{Espécie P : } P(x) = \frac{10}{1+12,5e^{-0,23x}}$$

$$\text{Espécie C : } C(x) = \frac{6}{1+2,9e^{-0,12x}}$$

Com base nas funções apresentadas, alguém afirmou que:

I) quando as árvores foram plantadas, a árvore da espécie P tinha menos 1,1m de altura do que a árvore da espécie C;

II) foram necessários mais do que oito anos para que a árvore da espécie P ficasse mais alta que a árvore da espécie C;

III) com o decorrer do tempo, a diferença entre as alturas das duas árvores tenderá a igualar os 4 m.

Elabore uma pequena composição na qual refira se cada uma das afirmações, I), II) e III), está, ou não, correcta, explicitando, para cada caso, uma razão que fundamente a sua resposta.

(1ª fase)

31. O Tomás gosta muito de aviões e costuma consultar com regularidade o sítio da internet do Instituto Nacional de Estatística, onde se encontram publicados os dados referentes ao tráfego aéreo nos diversos aeroportos portugueses. Ao analisar as tabelas de Dezembro de 2007, referentes ao «número de aeronaves aterradas/descoladas nos aeroportos nacionais por localização geográfica, tipo de tráfego e natureza do tráfego», o Tomás reparou que o 1 era, com muita frequência, o algarismo inicial de cada número. Por exemplo, o número de aviões aterrados num determinado aeroporto, nesse mês, foi de 157, número cujo algarismo inicial é 1. Tal facto deixou o Tomás muito intrigado e curioso. Para investigar a situação, resolveu determinar a percentagem de vezes em que cada algarismo, de 1 a 9, aparecia como algarismo inicial dos números registados. Os resultados, apresentados no gráfico da figura 5, foram surpreendentes.

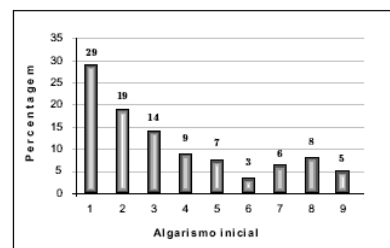


Fig. 5

a) Quando observou o gráfico, o Tomás considerou que uma função logarítmica era um bom modelo para esta distribuição. Depois de introduzir os dados nas listas da sua máquina calculadora, obteve, por regressão logarítmica, o modelo $P = 26,6723 - 10,9399 \times \ln(S)$ no qual P representa a percentagem de ocorrência do algarismo inicial S , com $S \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, e \ln o logaritmo de base e .

a₁) O gráfico de barras obtido sugere, por exemplo, que o algarismo 8 apresenta uma frequência relativa desajustada do modelo logarítmico. Determine a diferença entre a percentagem observada no gráfico e a percentagem P , obtida por aplicação do modelo, com aproximação às décimas. Em cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

a₂) Esta distribuição teve por base uma amostra de 216 dados. Quantos números se iniciariam com o algarismo 1, de acordo com o modelo encontrado?

b) A distribuição das frequências do algarismo inicial de muitas colecções de números recolhidos da realidade, como dados fiscais e índices da Bolsa, é uma distribuição logarítmica. Esta distribuição é conhecida por Lei de Benford:

$$P(n) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

na qual $P(n)$ designa a probabilidade de n ser o algarismo inicial de um número com

$n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, e \log designa o logaritmo de base 10.

Admita que está perante uma colecção de números que segue a Lei de Benford. Escolhe-se, ao acaso, um número dessa colecção. A probabilidade de ele começar por um certo algarismo é 0,058 (valor arredondado às milésimas). De que algarismo se trata?

(2ª fase)

32. Desde o nascimento, até aos 20 anos, a altura da Rita foi sempre aumentando. Admita que a altura, A , da Rita, em centímetros, evoluiu, aproximadamente, de acordo com a função definida por: $A(t) = \frac{170}{1+1,9e^{-0,22t}}$ com $t \in [0, 20]$

A variável t representa a idade da Rita, em anos.

a) Mostre que, até aos 20 anos, a altura da Rita não atingiu o valor de 175 cm.

b) A tabela seguinte apresenta valores de referência para as alturas das raparigas com idades compreendidas entre os 6 e os 8 anos. Estes valores foram publicados pela Organização Mundial de Saúde (2007 WHO Reference).

| Idade (anos) | 6 | 6,5 | 7 | 7,5 | 8 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Altura (cm) | 115,1 | 118,0 | 120,8 | 123,7 | 126,6 |

Considere a afirmação: «De acordo com a função A , aos 6 anos de idade, a altura da Rita estava abaixo do respectivo valor de referência mas, aos 8 anos de idade, a sua altura já estava acima do valor de referência estabelecido para essa idade». Justifique que a afirmação anterior é verdadeira. Apresente os valores relevantes para a sua resposta, com aproximação às décimas.

c) Na figura 5 apresenta-se um esboço do gráfico da função f , que dá a taxa de variação instantânea de A , no instante t . Neste esboço, está assinalado o ponto P , de abcissa 12.

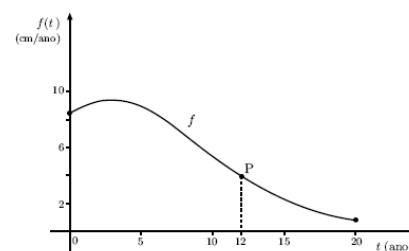


Fig. 5

c₁) Sabe-se que $f(12) \approx 4$ (valor aproximado às unidades). Explique, no contexto da situação, o que representa a expressão $f(12) \approx 4$.

c₂) Justifique que a taxa de variação média da função A é sempre positiva, em qualquer intervalo fechado $[a, b]$, contido no seu domínio, sendo a e b números reais, com $a < b$.
(época especial)

Exercícios (adaptados) saídos em Testes intermédios e exames (Matemática A – 2010)

33. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir. Admita que o número, em milhares, de coelhos que existem nessa região, t semanas após a doença ter sido detectada, é

$$\text{dado aproximadamente por } f(t) = \frac{k}{3-2e^{-0,13t}}$$

(k designa um número real positivo)

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

a) Suponha que $k = 10$. Ao fim de quantos dias, após a doença ter sido detectada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a 9000?

b) Admita agora que o valor de k é desconhecido. Sabe-se que, durante a primeira semana após a detecção da doença, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum. Determine o valor de k , arredondado às décimas.

(Intermédio 1)

34. Na Internet, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda. Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8 \log_4(3t + 1)^3 - 8 \log_4(3t + 1), t \in [0, 5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $N(t) = 16 \log_4(3t + 1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$

b) Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes. Apresente o resultado em horas e minutos. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

(1ª fase)

35. Considere uma função f , de domínio $]0, 3[$, cuja derivada f' , de domínio $]0, 3[$, é definida por

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f ;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

(1ª fase)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2010)

36. Uma médica pediatra, no âmbito da sua actividade profissional, regista, periodicamente, dados biométricos, como, por exemplo, a altura de cada uma das crianças a quem presta cuidados de saúde. O Filipe e o Guilherme são dois irmãos que, durante alguns anos, foram acompanhados por esta médica, nas consultas de pediatria. O Filipe é o irmão mais velho. De acordo com os dados recolhidos pela médica, constatou-se que:

- existem vários registos dos valores da altura do Filipe, desde o dia 1 de Julho de 2003 até ao dia 1 de Julho de 2008, inclusive;
- existem vários registos dos valores da altura do Guilherme, desde o dia 1 de Julho de 2004 até ao dia 2 de Julho de 2009, inclusive;
- no dia 1 de Julho de 2004, o Guilherme tinha menos 8 cm de altura do que tinha o Filipe em 1 de Julho de 2003.

Admita que, de acordo com os dados recolhidos, a altura, em cm do Filipe, entre os dias 1 de Julho de 2003 e 1 de Julho de 2008, inclusive, é dada, aproximadamente, pela função F , definida por $F(t) = 76,62 + 5,11t + 9,22 \ln(t + 1,25)$

com $0 \leq t \leq 5$. A variável t representa o tempo decorrido, em anos, desde o dia 1 de Julho de 2003.

a) Determine o crescimento médio do Filipe, durante os dois primeiros anos. Apresente o resultado arredondado às décimas. Em cálculos intermédios, nos arredondamentos que efectuar, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

b) Considere G a função que, de acordo com os dados recolhidos, dá, aproximadamente, a altura, em cm, do Guilherme, entre 1 de Julho de 2004 e 2 de Julho de 2009, inclusive. Admita que a função G pode ser definida, a partir da função F , por $G(t) = F(t + c) + d$ com $1 \leq t \leq 6$.

A variável t representa o tempo decorrido, em anos, desde o dia 1 de Julho de 2003. As letras c e d representam parâmetros constantes. Na figura 1, estão representados, no mesmo referencial, os gráficos das funções F e G . Indique, justificando, o valor de cada um dos parâmetros c e d . Na justificação da sua resposta, refira como, a partir do gráfico de F , se pode obter o gráfico de G , utilizando propriedades das transformações de funções.

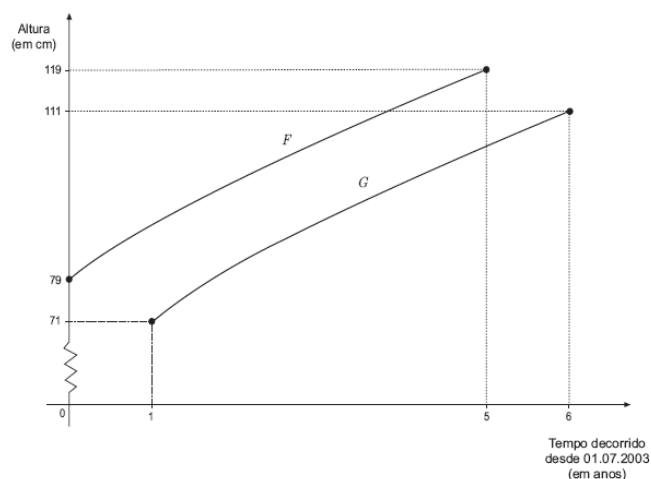


Figura 1

(Intermédio)

37. Uma equipa de biólogos estuda, desde o início do ano de 2000, a evolução do número de elementos das populações de milhafres e de esquilos existentes numa Reserva Natural, onde se desenvolvem actividades de ecoturismo. De acordo com os estudos efectuados, sabe-se que:

- o número de milhafres tem vindo a aumentar ao longo do tempo, embora lentamente, registando-se, na actualidade, um número ligeiramente inferior às cinco centenas de efectivos;
- o número de esquilos tem vindo a diminuir significativamente ao longo do tempo, registando-se, actualmente, um número de elementos inferior a meia centena de efectivos, o que coloca em risco a sobrevivência desta espécie na Reserva. Sejam M e E as funções que dão, respectivamente, o número aproximado, em centenas, de milhafres e de esquilos, x meses após o início do ano de 2000, sendo $x \geq 0$. Em cada uma das quatro opções seguintes, apresenta-se uma expressão para definir a função M e outra para definir a função E , sendo $x \geq 0$

A) $M(x) = 0,8 + 7 \times 1,03^{-x}$; $E(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln(2,5)}$

B) $M(x) = \frac{5}{1 + 6 \times e^{-0,05x}}$; $E(x) = 0,8 + 7 \times 1,03^{-x}$

C) $M(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln(2,5)}$; $E(x) = 9 \times 1,03^{-x}$

D) $M(x) = \frac{5}{1 + 6 \times e^{-0,05x}}$; $E(x) = 9 \times 1,03^{-x}$

Apenas a opção D) está correcta, de acordo com os estudos efectuados. Numa pequena composição, apresente, para cada uma das outras três opções, uma razão que justifique a sua rejeição, com base em propriedades das funções definidas pelas expressões apresentadas em cada uma dessas opções.

Nota – Poderá ser-lhe útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. Se o fizer, deve reproduzir, na sua folha de prova, o(s) gráfico(s) obtido(s).

(1ª fase)

38. Um investigador estudou a evolução da epidemia de cólera que ocorreu numa certa região de um país, durante os anos de 2000 e 2001. No início do ano de 2000, o total da população dessa região era de 950 000 pessoas. Com base nos estudos efectuados, o investigador considerou que, nessa região, o número total de pessoas, da população inicial, que foram contagiadas pela doença, desde o início do ano de 2000 até ao instante t , é dado, aproximadamente, por:

$$F(t) = \frac{57000}{1 + 4980 \times e^{-0,27t}} \text{ para } 0 \leq t \leq 60$$

A variável t representa o tempo, em semanas, decorrido desde o início do ano de 2000.

a) De acordo com o modelo apresentado, o número de pessoas contagiadas duplicou num intervalo de poucas semanas, passando de 10 000 para 20 000. Determine a duração desse intervalo de tempo. Apresente o resultado em semanas e dias (dias arredondados às unidades). Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, utilize, no mínimo, três casas decimais.

b) Sabe-se que o modelo logístico definido pela função F se manteve válido ao longo de 60 semanas. Determine a percentagem da população inicial de 950 000 pessoas que foi contagiada pela doença, no referido período de tempo. Apresente o resultado aproximado às unidades.

c) Considere a seguinte afirmação: «O valor da taxa de variação instantânea de F em $t = 30$ é maior do que o valor da taxa de variação instantânea de F em $t = 40$.» Explique, no contexto do problema, o significado da afirmação.

(2ª fase)

39. Com as suas leituras, o Duarte aprendeu que o brilho aparente das estrelas é estudado desde a Antiguidade. Os astrónomos medem o brilho das estrelas através do conhecimento das respectivas magnitudes, a magnitude absoluta, M , e a magnitude aparente, m , de uma estrela. Sabe-se que a magnitude absoluta, M , e a magnitude aparente, m , de uma estrela podem relacionar-se através da fórmula

$$M = m + 5 \log\left(\frac{10}{d}\right) \text{ em que } d \text{ é a distância, em parsecs, a que}$$

a estrela se encontra da Terra, e em que \log designa logaritmo de base 10. Suponha que a magnitude absoluta de uma estrela excede a sua magnitude aparente em 5 unidades. Determine a distância, em parsecs, a que essa estrela se encontra da Terra.

(época especial)

Exercícios (adaptados) saídos em Testes intermédios e exames

(Matemática A – 2011)

40. Na Figura 1, está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \log_9(x)$

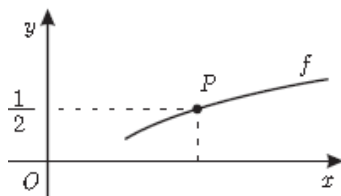


Figura 1

P é o ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{1}{2}$

Qual é a abcissa do ponto P ?

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{9}{2}$

(Intermédio 1)

41. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.

$N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_A(t) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{0,2t}} \text{ com } t \geq 0$$

$N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_B(t) = \frac{150}{1 + 50 \times e^{0,4t}} \text{ com } t \geq 0$$

a) Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou. Determine de quanto foi esse aumento. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

b) Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

(2ª fase)

42. O momento sísmico, M_0 , é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E , que é a que os sismógrafos registam. A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$. A magnitude, M , de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9$.

a) Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1. Determine o momento sísmico, M_0 , para esse sismo. Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10

b) Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos. Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

(1ª fase especial)

43. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $]-\infty, 6[$, definida por $f(x) = 2 + 15 \ln(3 - \frac{1}{2}x)$. Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas.

Para cada posição do ponto C, considere o rectângulo [OACB], em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

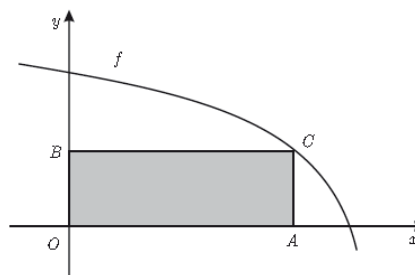


Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo [OACB] é máxima. Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do rectângulo [OACB] em função da abcissa do ponto A;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

(1ª fase especial)

44. Para um certo valor real de k , admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$$Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2) \text{ com } t \in [0, 20].$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de k .

(época especial)

Exercícios saídos em Exames (Matemática B - 2011)

45. A intensidade de um som relaciona-se com a amplitude da onda sonora. Considera-se que o nível sonoro, N , medido em decibéis (dB), é função da intensidade sonora, I , medida em watt por metro quadrado (W/m^2), de acordo com a igualdade

$$N = 120 + 10 \log_{10}(I) \text{ para } I > 0$$

a) A legislação portuguesa estipula que, para veículos motorizados de duas rodas de $125cm^3$ de cilindrada, o nível sonoro desses veículos, quando em funcionamento, não deve exceder o limite máximo de 105 dB. Determine o valor da intensidade sonora, em W/m^2 , que corresponde ao limite de 105 dB. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

b) O Rui fez um trabalho escolar em que relacionou a intensidade sonora com o nível sonoro. Nesse trabalho, incluiu uma tabela que continha, para diferentes tipos de fontes sonoras, as respectivas intensidades, em W/m^2 , e os respectivos níveis sonoros, em dB. Apresenta-se, a seguir, parte dessa tabela.

| Fonte sonora | Brisa por entre as folhas das árvores | Grande superfície comercial | Tráfego rodoviário (numa via rápida) | Concerto de música rock | Avião a jacto |
|--------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|-------------------------|---------------|
| Intensidade sonora (W/m^2) | 10^{-10} | 10^{-6} | 10^{-4} | 10^{-1} | 10^2 |
| Nível sonoro (dB) | 20 | 80 | 80 | 110 | 140 |

O texto seguinte é um excerto do trabalho elaborado pelo Rui.

«De acordo com o modelo que relaciona o nível sonoro com a intensidade sonora, podemos concluir que:

III) o nível sonoro de 0 decibéis, que marca o limiar inferior da audição humana, corresponde a uma intensidade de $0,000\ 000\ 000\ 01\text{W/m}^2$

III) ao compararmos o nível sonoro provocado pela sirene de um navio, cuja intensidade é cerca de 5W/m^2 , com os níveis sonoros mais elevados que constam da tabela, verificamos que esse nível sonoro está mais próximo do nível sonoro registado no concerto de música rock do que do nível sonoro registado no funcionamento do avião a jacto;

III) a intensidade sonora do avião a jacto em funcionamento é cerca de 600 vezes superior à intensidade sonora causada pelo tráfego rodoviário que circula numa via rápida.»

As conclusões I), II) e III) formuladas pelo Rui são todas incorrectas. Elabore uma pequena composição na qual, para cada uma das conclusões formuladas pelo Rui, apresente uma razão que fundamente a respectiva incorrecção.

(1ª fase)

46. Numa determinada região, existe um lago natural onde foram efectuadas descargas de resíduos poluentes. Uma associação ambientalista detectou que a concentração, na água desse lago, de uma determinada substância poluente era muito elevada, o que punha em risco a sobrevivência de algumas espécies aí existentes, entre as quais a truta.

a) O número de trutas existentes no lago diminuiu acentuadamente em consequência das descargas de resíduos poluentes. Alguns anos depois de as descargas terem ocorrido, procedeu-se ao repovoamento do lago com exemplares desta espécie. Admita que o número de trutas existentes no lago, N , em milhares, x semanas após o início do

repopoamento, é dado, aproximadamente, por

$$N(x) = \frac{20x+2}{x+2} \text{ para } x \geq 0$$

a₁) Mostre que, de acordo com o modelo apresentado, entre a segunda e a oitava semanas, se registou um aumento médio de 950 trutas, por semana.

a₂) O número de trutas existentes no lago, imediatamente antes de ocorrerem as descargas de resíduos poluentes, foi estimado em 22 000. Averigüe se, de acordo com o modelo apresentado, o número de trutas no lago poderá vir a atingir o valor que foi estimado para a população de trutas existentes no lago imediatamente antes de ocorrerem as referidas descargas. Justifique a sua resposta, usando propriedades da função N

b) Perto do lago, existe um sistema integrado de vários aquários. Em cada um dos aquários do sistema, vivem, em equilíbrio, diferentes espécies aquáticas. A equipa de biólogos responsável pelo sistema tem como objectivo a preservação e o estudo dessas espécies, e utiliza o conceito de diversidade biológica. Admita que a diversidade biológica, D , de um ecossistema, no qual vivem n espécies com igual número

de efectivos, é dada por $D(n) = \log_2(n)$, sendo n um número inteiro positivo. Num aquário, os biólogos pretendem colocar n espécies diferentes com igual número de efectivos. Determine, de acordo com as condições referidas, o número mínimo de espécies que é necessário colocar no aquário, de modo que a diversidade nesse aquário não seja inferior a 4,3

(2ª fase)

47. Os grilos são insectos conhecidos pelo seu canto peculiar – as estridulações, sons vibrantes produzidos com as asas anteriores. Há diversos países onde se faz a criação de grilos em cativeiro com fins comerciais. Numa criação de grilos, realizou-se, a partir do dia 2 de Julho de 2010, inclusive, um controlo semanal do número de efectivos da sua população, durante um período de dez semanas. Admita que, de acordo com os dados recolhidos, o número de grilos, g , existentes x semanas após aquele dia é dado, em milhares, aproximadamente, por $g(x) = 1,2 \times e^{0,1484x}$ para $0 \leq x \leq 10$

a) Mostre que, no período considerado, a população de grilos aumentou semanalmente cerca de 16% (valor percentual arredondado às unidades).

b) Num certo dia do mês de Julho de 2010, o número de efectivos da população de grilos era 1392. No dia em que o número de grilos atingiu o triplo do número dos que existiam naquele dia do mês de Julho de 2010, procedeu-se a uma redistribuição dos grilos pelas diferentes caixas de criação.

Em que data é que se procedeu a essa redistribuição? Justifique a sua resposta. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, cinco casas decimais.

(época especial)

| | | | | | | |
|-----------------------|---------------------------|----------------|--------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Soluções: 1. 33; 0,38 | 2. ,05; 2h19m; Carlos,Ana | 3. 0,8; 1H43' | 4. 9,8; 1837 | 5. 0; 7,58 | 6. B | 7. 29,7; -15 |
| 8. 3,42 e 4,96 | 9. d | 10. 45 | 11. -0,28; 5 | 12. 21 | 13. 1,73; 9h3' e 11h56' | 14. 10,03; Não |
| 15. 25,98; sim | 16. 14,4; 18°C; -0,09 | 17. 19; 16 | 18. 1,2 | 19. 10 e 2000; 529 ou 530 | 20. 0, 1 e 2 | 28. 31; 7×10^{11} |
| 21. 34h39min | 22. 6,49 | 23. 100 | 24. 337; 1671; não | 25. 219. | 26. 0; 12h20' | 27. 2,47; 6,05 |
| 29. -20,7 | 30. III | 31. 4,1; 58; 7 | 32. 112,8; 128,1 | 33. 3; 10,2 | 34. 2h20' | 35. 0,57 |
| 36. 9,5; -1 e -8 | 38. 3s3d; 6% | 39. 1 | 40. C | 41. 29; 8 | 42. $6,26 \times 10^{19}$ | 43. 2,47 |
| 45. 0,03 | 46. Não; 20 | 47. 30Ago | | | | 44. 0,18 |

O professor: RobertOliveira