



www.esaas.com

Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE
A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos

FASE EXTRAORDINÁRIA

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de doze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

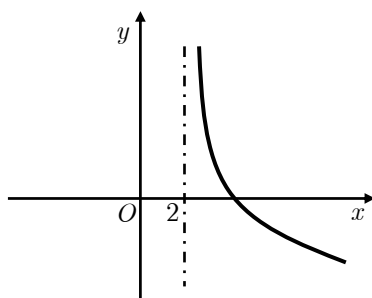
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

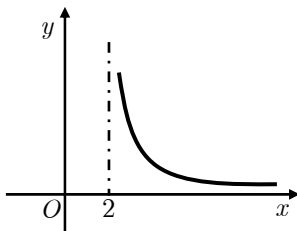
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função f de domínio $]2, +\infty[$.

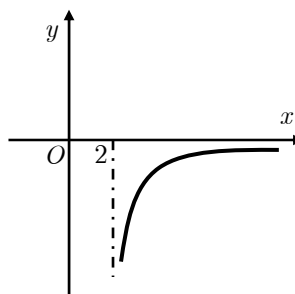


Qual das seguintes pode ser a representação gráfica da função f'' , **segunda derivada** de f ?

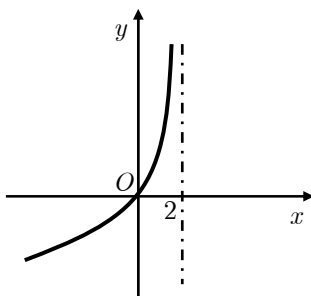
(A)



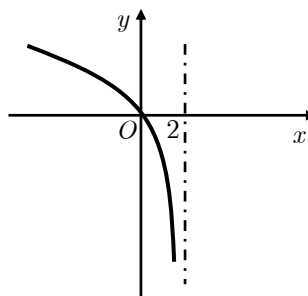
(B)



(C)



(D)



2. Seja g a função de domínio \mathbb{R} definida por $g(x) = 5^x$

Sabe-se que 3 é a ordenada de um ponto P do gráfico de g .

Qual é a abscissa de P ?

(A) $\ln 3$

(B) $\ln 5$

(C) $\log_5 3$

(D) $\log_3 5$

3. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 2}$?

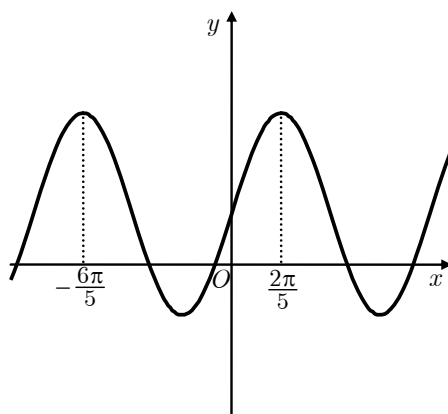
(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) $+\infty$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.



Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

(A) $\frac{2\pi}{5}$

(B) $\frac{4\pi}{5}$

(C) $\frac{6\pi}{5}$

(D) $\frac{8\pi}{5}$

5. Num saco estão oito bombons de igual aspecto exterior. No entanto, cinco são de chocolate e três são de coco. Tiram-se do saco três desses bolos ao acaso. Qual é a probabilidade de serem todos de coco?

(A) $\frac{1}{5! \times 3!}$

(B) $\frac{3!}{8!}$

(C) $\frac{1}{{}^8C_3}$

(D) $\frac{1}{{}^8A_3}$

6. Os dois primeiros números de certa linha do triângulo de Pascal são 1 e 50. A que é igual a soma dos dois últimos números da **linha seguinte**?

(A) 51

(B) 52

(C) 102

(D) 104

7. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo real?

(A) $\operatorname{Re}(z) = 0$

(B) $z + \bar{z} = 0$

(C) $z - \bar{z} = 0$

(D) $|z| = 0$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = 3 + 4i$
 - 1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma algébrica, $\frac{z}{i} - 4i$
 - 1.2. Seja θ um argumento do número complexo z .
Exprima, na forma trigonométrica, em função de θ , o produto de i pelo conjugado de z .

2. O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0559.
 - 2.1. Quantos códigos diferentes existem com apenas dois algarismos zero?
 - 2.2. Escolhe-se, ao acaso, um código de um cartão multibanco com os algarismos **diferentes**.
Qual é a probabilidade de esse código representar um número inferior a 5000?
Apresente o resultado na forma de dízima.
 - 2.3. Com o objectivo de arranjar um código para si, o Anselmo escreveu um número em cada um de alguns cartões: em doze deles pôs algarismos pares e nos outros pôs números ímpares. Depois, meteu todos os cartões num saco e extraiu, sucessivamente e ao acaso, dois desses cartões, não repondo o primeiro cartão extraído, antes de retirar o segundo. Considere os acontecimentos:
 X : «o número do primeiro cartão é um número ímpar»;
 Y : «o número do segundo cartão é um número par».
Sabe-se que o valor da probabilidade condicionada $P(Y | X)$ é igual a $\frac{1}{3}$.
Quantos cartões com números ímpares existiam inicialmente no saco? Justifique.

3. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em quilómetros), por

$$P(h) = 101 e^{-0,12h}.$$

- 3.1. A altitude do cume do Pico Ruivo, na Madeira, é 1861 metros. Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.
- 3.2. Mostre que, para qualquer h , $\frac{P(h+10)}{P(h)} \approx 0,3$.
Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

4. É dada a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- 4.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes.

4.2.1. Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

4.2.2. Mostre que a função f tem um único máximo e determine-o.

- 4.2. O gráfico de f contém um único ponto de intersecção com a recta $y = -1$.
Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas).
Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

5. Considere a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = 3x - \cos x$

5.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função g tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$.

5.2. Seja g' a função derivada de g . Mostre que $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de g , cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa	9
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada.....	0

Grupo II137

1.	21
1.1.	11
1.2.	10
2.	32
2.1.	10
2.2.	12
2.3.	10
3.	20
3.1.	8
3.2.	12
4.	38
4.1.	25
4.1.1.	12
4.1.2.	13
4.2.	13
5.	26
5.1.	13
5.2.	13

TOTAL200