

EXAME DO ENSINO SECUNDÁRIO DE EQUIVALÊNCIA À FREQUÊNCIA

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, 29 de Agosto)

Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos

1.ª FASE

Prova Escrita de Matemática

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas,

- o número do item;
- a letra identificativa da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

As cotações dos itens encontram-se na página 11.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta) \cdot (\rho' \text{cis } \theta') = \rho \cdot \rho' \text{cis}(\theta + \theta')$

$\frac{\rho \text{cis } \theta}{\rho' \text{cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{cis}(\theta - \theta')$

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. A tabela representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X .

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$2a$	a

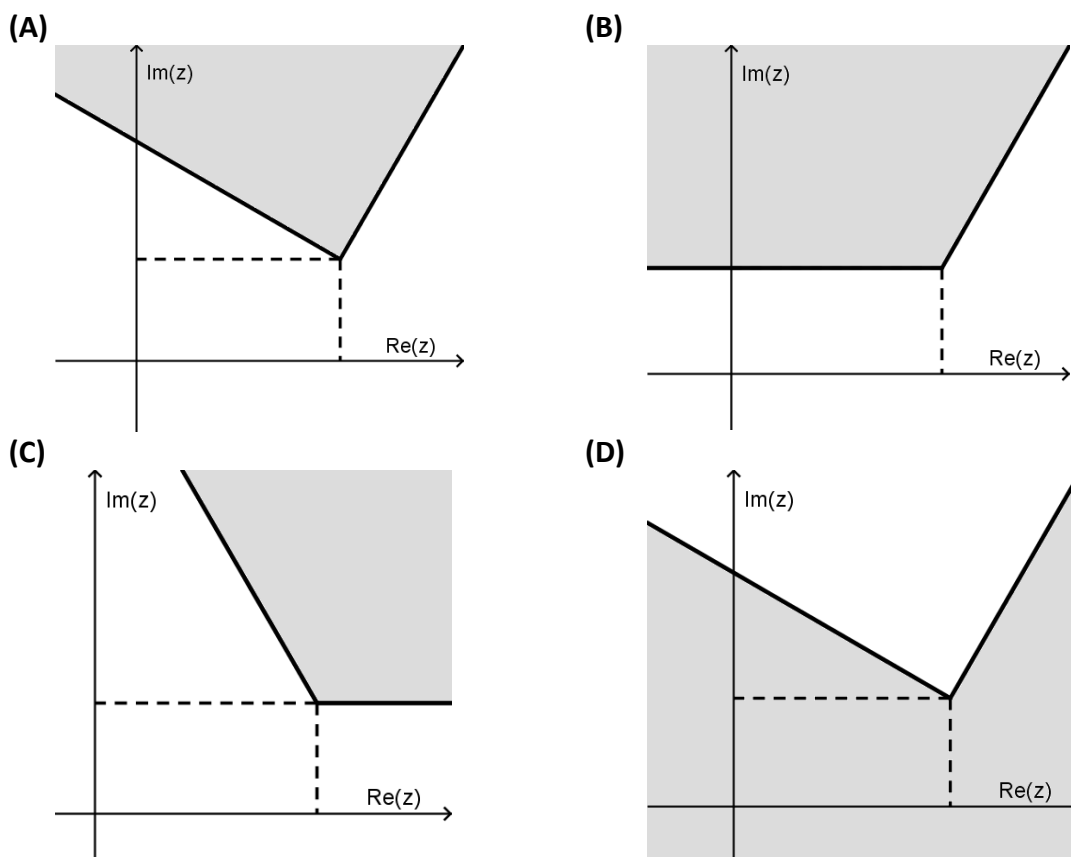
O valor de a é:

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

2. Seja $z_0 = 2 + i$. As imagens dos números complexos z tais que

$$\frac{\pi}{3} \leq \arg(z - z_0) \leq \frac{5}{6}\pi$$

estão representadas em:



3. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 5x - 2^{x+1}$.

Em qual dos intervalos seguintes é possível garantir pelo Teorema de Bolzano, a existência de pelo menos um zero?

- (A) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $[1, 2]$ (D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

4. Uma caixa tem quatro bolas verdes e 3 amarelas e outra tem 2 bolas verdes e 4 amarelas.

Joga-se um dado equilibrado: se sai par tira-se uma bola da primeira caixa, caso saia ímpar, tira-se da segunda.

Qual é o valor da probabilidade de tirar uma bola amarela, sabendo que no dado saiu o número 2?

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{7}{13}$ (D) 1

5. O valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi + x) - \operatorname{tg}(3\pi)}{2x}$$

é igual a:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 0

6. Seja g uma função de domínio \mathbb{R} e seja $g'(x) = (4 + x)^2$ a sua derivada.

Qual das afirmações é **verdadeira**?

- (A) O gráfico de g não tem ponto de inflexão.
(B) O gráfico de g tem a concavidade sempre voltada para cima.
(C) O ponto de coordenadas de coordenadas $(-4, g(-4))$ é ponto de inflexão de g .
(D) O gráfico de g tem a concavidade sempre voltada para baixo.

7. Seja f uma função de domínio \mathbb{R}^- , estritamente crescente.

Os eixos coordenados são assíntotas do gráfico de f .

Seja (x_n) a sucessão de termo geral

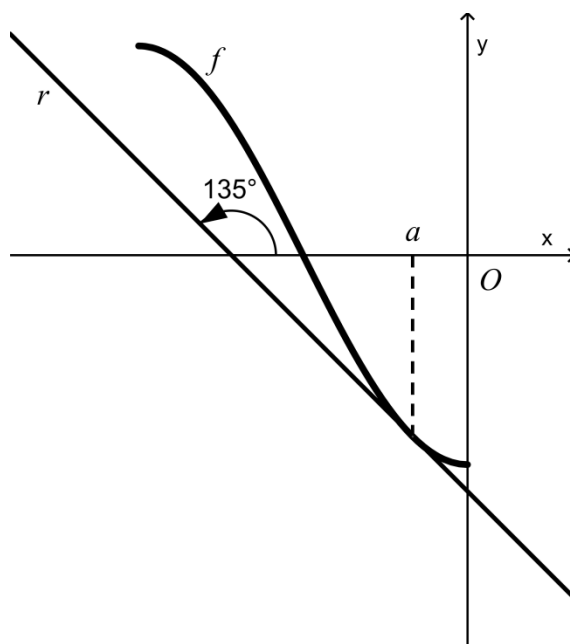
$$x_n = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

- (A) 1 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) 0

8. Na figura está parte da representação gráfica da função f , no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, definida por $f(x) = -\cos(2x)$.

A recta r , de inclinação 135° , é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a .



Qual é o valor de a ?

- (A) $-\frac{\pi}{6}$ (B) $-\frac{\pi}{12}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{\pi}{4}$

GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Sejam A e B dois acontecimentos de um mesmo espaço E . Se $P(A \cap B) = 0,17$ e $P(A) = 0,35$, mostre que o **valor máximo** de $P(B)$ é $0,82$.

2. Seja f a função de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3e^x - 3}{2x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Recorrendo **exclusivamente a métodos analíticos**, resolva as alíneas seguintes.

2.1. Estude a função f quanto à continuidade no ponto de abscissa zero.

2.2. Averigúe a existência de assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de f .

3. Considere em \mathbb{C} , os seguintes números complexos:

$$z_1 = 1 + i \text{ e } z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$$

3.1. Seja $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, $\rho > 0$. Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo.

3.2. Suponha que as imagens de z_2 e do seu conjugado são vértices consecutivos do polígono cujos vértices são as raízes de índice n de um certo número w .

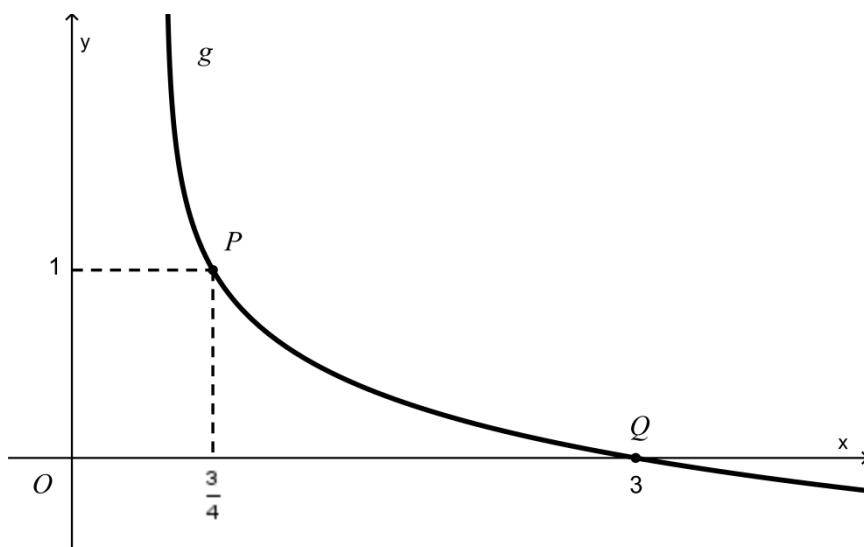
Determine n e w . Apresente o complexo w na forma algébrica.

4. Considere a função logarítmica do tipo

$$g(x) = -\log_{10}(ax - b) + 1 \text{ com } a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } b \in \mathbb{R}^+$$

Na figura está parte da representação gráfica da função g , de domínio $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de g . O ponto P tem coordenadas $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ e Q tem abscissa 3 e pertence ao eixo Ox .



4.1. Determine os valores exactos de a e b da expressão $g(x)$.

4.2. Tendo em atenção a representação gráfica de g e a função polinomial h definida por $h(x) = -x^2 + 3x$, resolva a condição

$$\frac{h(x)}{g(x+2)} \leq 0$$

5. A Ana foi à florista e comprou 7 vasos para plantas: três vasos de forma cúbica iguais, três vasos cilíndricos de diferentes alturas e um cónico.

A Ana ao arrumar os vasos colocou-os em fila numa prateleira.

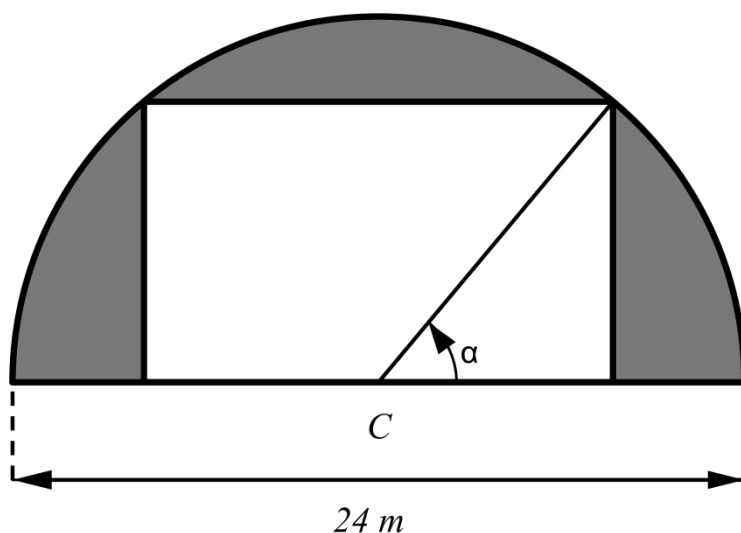
5.1. De quantas maneiras distintas poderá ter colocado os 7 vasos na prateleira?

5.2. Qual é a probabilidade do vaso cónico ficar no meio e os da mesma forma ficarem juntos?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

6. A secção de um túnel é semi-circular de centro C e diâmetro 24 metros. No interior do túnel há uma estrutura rectangular com mostra a figura.

Relativamente ao ângulo α assinalado na figura considere que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



- 6.1. Mostre que a área da parte sombreada é dada em função de α e em m^2 por

$$A(\alpha) = 72\pi - 144 \sin(2\alpha)$$

- 6.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora determine o(s) valor(es) de α , em radianos, de modo que a área sombreada seja igual a 100 m^2 .

Na sua resposta apresente o(s) gráfico(s) obtidos e assinale as abcissas do(s) ponto(s) que lhe permitiram responder à questão, valore(s) da(s) abcissa(s) arredondado(s) às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I (8 × 5) **40 pontos**

GRUPO II **160 pontos**

1. 15 pontos

2. 30 pontos

2.1. 10 pontos

2.2. 20 pontos

3. 25 pontos

3.1. 10 pontos

3.2. 15 pontos

4. 35 pontos

4.1. 18 pontos

4.2. 17 pontos

5. 25 pontos

5.1. 13 pontos

5.2. 12 pontos

6. 30 pontos

6.1. 15 pontos

6.2. 15 pontos

TOTAL **200 pontos**