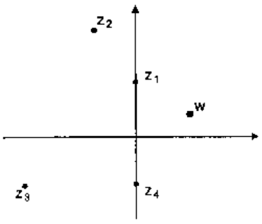
Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática – 12.º ano

Números Complexos - alguns exercícios saídos em exames

(Exames Nacionais 2000)

1. Seja C o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de 5 n.ºs complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4.

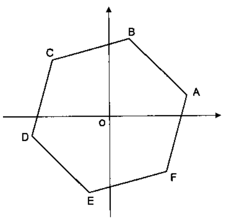


Qual é o n.º complexo que pode ser igual a 2iw?

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

(Prova Modelo)

3. Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo n.º complexo.



O vértice C é a imagem geométrica do n.º complexo $\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}$. Qual dos seguintes n.ºs complexos tem por imagem geométrica o vértice D?

(A) $\sqrt{2}\,cis\,\frac{7\pi}{6}$ (B) $\sqrt{2}\,cis\,\frac{13\pi}{12}$

(C) $\sqrt[6]{2}\,cis\,\frac{7\pi}{6}$ (D) $\sqrt[6]{2}\,cis\,\frac{13\pi}{12}$

(1ª chamada)

4. Seja A o conjunto dos n.ºs complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1.

a) Defina, por meio de uma condição em C, a parte de A contida no 2º quadrante (excluindo os eixos do referencial).

b) Sem recorrer à calculadora, mostre que o nº complexo $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}}$ pertence ao conjunto A.

(1ª chamada)

5. Seja z um n.º complexo de argumento π/5. Qual poderá ser um argumento do simétrico de z?

(A) -π/5 (B) π+π/5 (C) π-π/5 (D) 2π+π/5

(2ª chamada)

7. Qual das seguintes condições define uma recta no plano complexo?

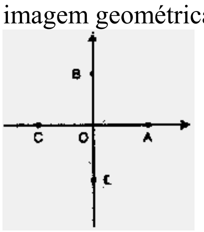
(A) |z-1|=4 (B) arg(z)=π/2

(C) 3z+2i=0 (D) |z-1|=|z+i|

(2ª fase)

(Exames Nacionais 2001)

9. Seja z=yi, com y∈R\{0}, um n.º complexo. Qual dos 4 pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4?



(A) O ponto A
(B) O ponto B
(C) O ponto C
(D) O ponto D

(Prova Modelo)

10. Em C, conjunto dos n.ºs complexos, considere $z_1=7+24i$.

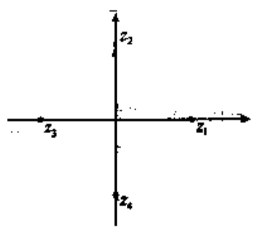
a) Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

b) Seja $z_2=cis\,\alpha$ com $\alpha\in]3\pi/4,\pi[$. Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1\times z_2$

(Prova Modelo)

11. Seja w um n.º complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no 1.º quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares. Seja $\overline{w}$ o conjugado de w.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de 4 nºs complexos: z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\overline{w}}$?

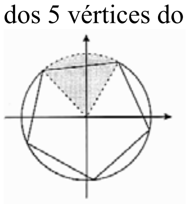
(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

(1ª chamada)

12. Em C, conjunto dos nºs complexos, seja $z_1=2\,cis\,\pi/3$

a) Sem recorrer à calculadora, verifique que $\frac{z_1^3+2}{i}$ é um imaginário puro.

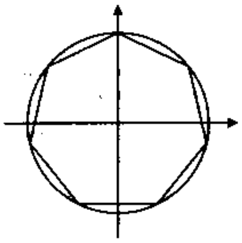
b) No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos 5 vértices do pentágono regular representado na figura.



Este pentágono regular está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial. Defina, por meio de uma condição em C, a região sombreada, excluindo a fronteira.

(1ª chamada)

13. Na figura está representado, no plano complexo, um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.

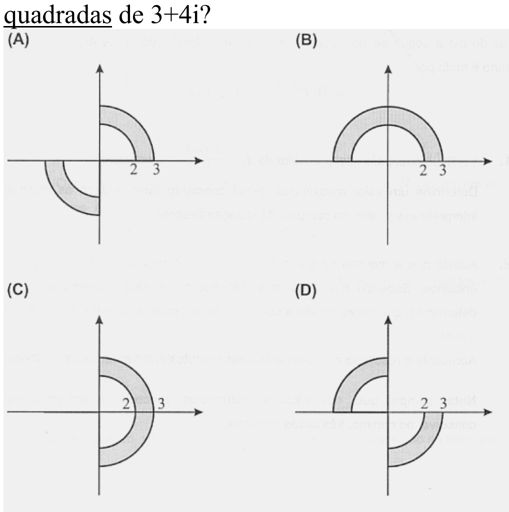


Os vértices do heptágono são, para um certo n.º natural n, as imagens geométricas das raízes de índice n de um n.º complexo z. Qual é o valor de z?

(A) 1+i (B) 1-i (C) i (D) -i

(2ª chamada)

15. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as imagens geométricas das <u>raízes quadradas</u> de 3+4i?



(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2002*)

17. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?

(A) $z+\bar{z}=0$ (B) $\text{Im}(z)=1$ (C) $|z|=0$ (D) $z-\bar{z}=0$

(1ª chamada)

18. Em $\mathbb{C}$, considere os n.ºs complexos: $z_1=1+i$ e

$z_2=\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{3}{4}\pi$.

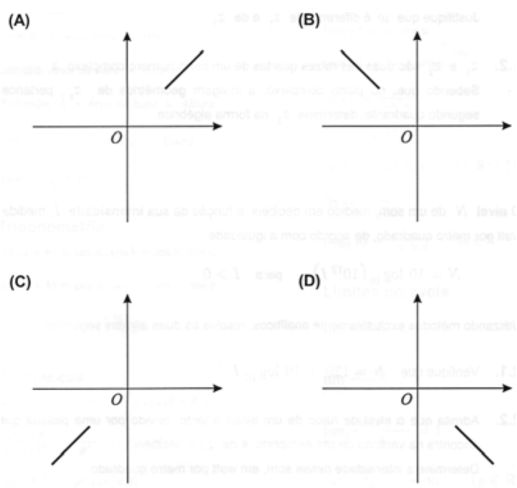
a) Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo n.º complexo. Determine esse n.º, apresentando-o na forma algébrica.

b) Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que: A é a imagem geométrica de z_1; B é a imagem geométrica de z_2; O é a origem do referencial. Determine o perímetro do triângulo [AOB].

(1ª chamada)

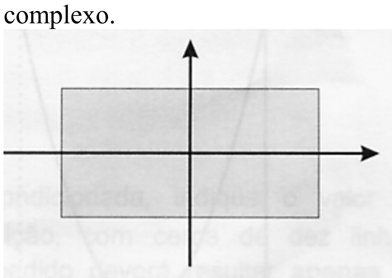
19. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto

$\{z\in\mathbb{C}: |z+1|=|z-i| \wedge 2\leq \text{Im}(z)\leq 4\}$?



(2ª chamada)

21. Na figura está representado um rectângulo de comprimento 4 e largura 2, centrado na origem do plano complexo.



Seja z um n.º complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do rectângulo. Qual dos seguintes n.ºs complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do rectângulo?

(A) z^{-1} (B) $\bar{z}$ (C) z^2 (D) $2z$

(2ª fase)

22. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos n.ºs complexos, considere $z_1=1+i$

a) Determine os nºs reais b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio x^2+bx+c.

b) Seja $z_2=\text{cis}\alpha$. Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo $[0,2\pi]$, para o qual $z_1\times\overline{z_2}$ é um n.º real negativo.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2003*)

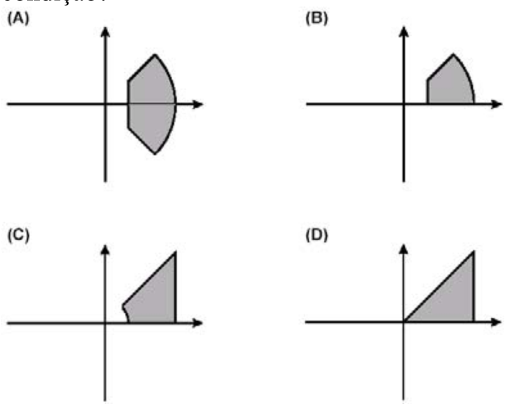
23. Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares. A imagem geométrica de w^4 pertence a uma das rectas a seguir indicadas. A qual delas?
(A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissectriz dos quadrantes pares
(D) Bissectriz dos quadrantes ímpares

(1ª chamada)

25. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição:

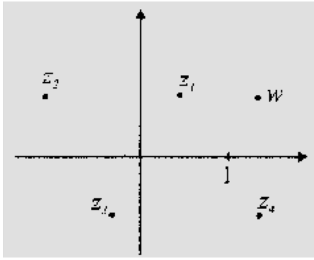
$|z| \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad Re\, z \geq 1$

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?



(2ª chamada)

27. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4. Qual é o n.º complexo que pode ser igual a 1-w?
(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4



(2ª fase)

28. $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; *i* designa a unidade imaginária.

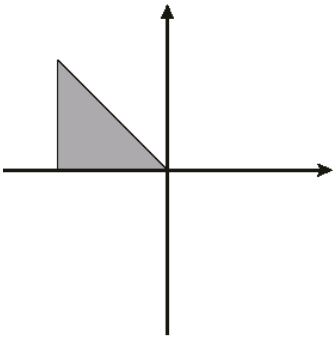
a) Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1+\sqrt{3}\,i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

b) Seja z um n.º complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no 2.º quadrante e pertencente à recta definida pela condição Re(z)=-2. Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z. Seja O a origem do referencial. Represente, no plano complexo, um triângulo [AOB], de acordo com as condições enunciadas. Sabendo que a área do triângulo [AOB] é 8, determine z, na forma algébrica.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2004*)

29. Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo rectângulo isósceles.



Os catetos têm comprimento 1, estando um deles contido no eixo dos números reais. Um dos vértices do triângulo coincide com a origem do referencial. Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $Re(z) \geq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \leq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(B) $Re(z) \leq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(C) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \geq |z+1|$

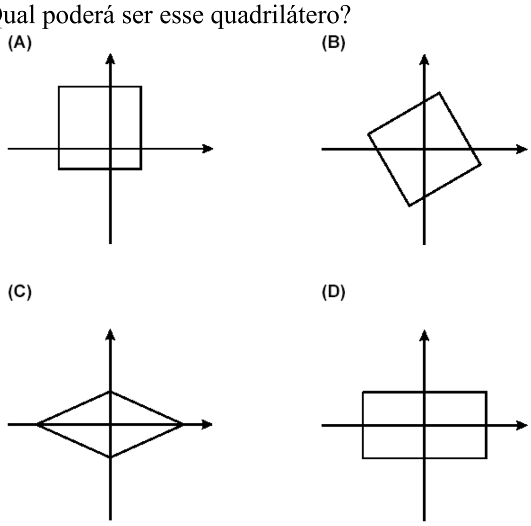
(D) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \leq |z-1|$

(1ª chamada)

31. Seja z um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos). Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

(1ª chamada)

32. Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w.
Qual poderá ser esse quadrilátero?



(2ª chamada)

33. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w=4-3i$

a) Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma algébrica, $2i+w^2/i$

b) Seja α um argumento do número complexo w. Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de i pelo conjugado de w.

(2ª chamada)

(Exames Nacionais 2005)

35. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Considere $w=\frac{2+i}{1-i}-i$. Sem recorrer à calculadora, escreva w na forma trigonométrica.

b) Considere $z_1=\text{cis}(\alpha)$ e $z_2=\text{cis}(\frac{\pi}{2}-\alpha)$. Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de z_1+z_2 pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(1ª fase)

36. Em qual das opções seguintes estão duas raízes cúbicas de um mesmo número complexo?

(A) $\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$ e $\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$ (B) $\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$ e $\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$

(C) $\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ e $\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$ (D) $\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$ e $\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$

(2ª fase)

37. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w_1=1+i$, $w_2=\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{12}$ e $w_3=\sqrt{3}\,\text{cis}(-\frac{\pi}{2})$.

a) Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\frac{w_1\times w_2-2}{w_3}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Represente, no plano complexo, a região definida pela condição $\text{Re}(z)\geq\text{Re}(w_1)\ \wedge\ |z-w_3|\leq\sqrt{3}$

(2ª fase)

$\boxed{E_1}$. Considere, no plano complexo, um ponto A, imagem geométrica de um certo n.º complexo z. Sabe-se que A não pertence a qualquer um dos eixos do plano complexo. Seja B o ponto simétrico do ponto A, relativamente ao eixo imaginário. Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o ponto B?

(A) $\bar{z}$ (B) $\frac{1}{z}$ (C) $-\bar{z}$ (D) $-z$

(Época especial)

(Exames Nacionais 2006)

39. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{4+2i(cis\frac{\pi}{6})^6}{3+i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

b) Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$, por,

$\frac{1}{2}\leq|z|\leq 1\ \wedge\ \frac{3\pi}{4}\leq\arg(z)\leq\frac{5\pi}{4}$

e determine a sua área.

(1ª fase)

41. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Considere $z_1=(2-i)(2+cis\frac{\pi}{2})$ e $z_2=\frac{1}{5}cis(-\frac{\pi}{7})$

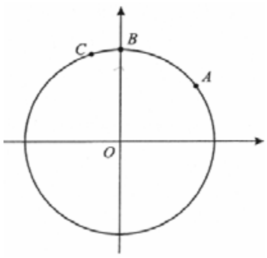
Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

b) Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante. Seja B a imagem geométrica de $\bar{z}$, conjugado de z. Seja O a origem do referencial.

Sabe-se que o triângulo [AOB] é equilátero e tem perímetro 6. Represente o triângulo [AOB] e determine z na forma algébrica.

(2ª fase)

$\boxed{E_3}$. Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem do referencial.



Os pontos A, B e C pertencem a essa circunferência. O ponto A é a imagem geométrica de $4+3i$. O ponto B pertence ao eixo imaginário. O arco BC tem 18 graus de amplitude. Em cada uma das 4 alternativas que se seguem, está escrito um número complexo na forma trigonométrica (os argumentos estão expressos em radianos). Qual deles tem por imagem geométrica o ponto C?

(A) $7cis\frac{2\pi}{3}$ (B) $7cis\frac{3\pi}{5}$ (C) $5cis\frac{2\pi}{3}$ (D) $5cis\frac{3\pi}{5}$

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2007*)

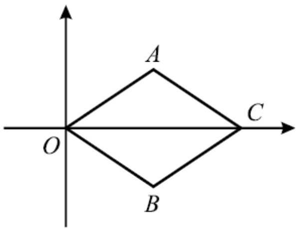
42. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i (B) -1 e i (C) $1-i$ e $1+i$ (D) $1-i$ e $-1+i$

(1ª fase)

43. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \text{cis}\,\alpha$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

a) Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo [AOBC]. A e B são as imagens geométricas de z e $\bar{z}$, respectivamente. C é a imagem geométrica de um número complexo, *w*. Justifique que $w = 2\cos\alpha$



b) Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\frac{z^3}{i}$ é um número real.

(1ª fase)

45. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam: $z_1 = 3 + yi$ e $z_2 = 4iz_1$ (i é a unidade imaginária e y designa um número real).

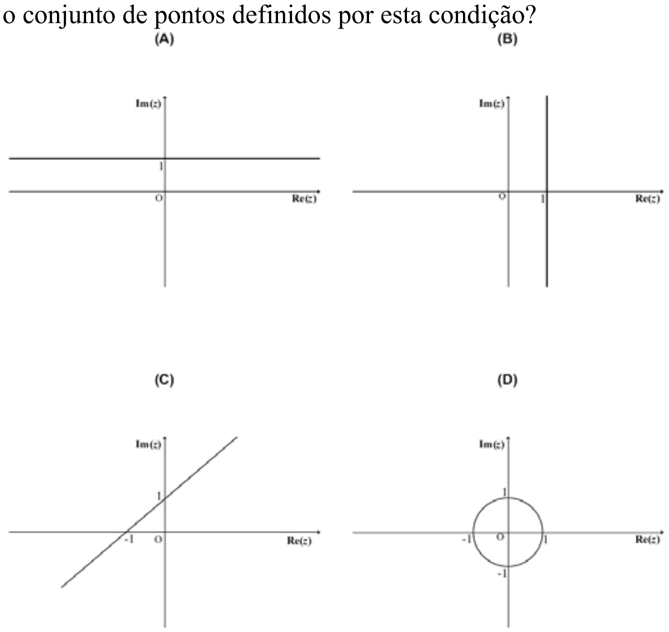
a) Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, Arg(z) designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$. Admitindo que $\text{Arg}(z_1)=\alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\text{Arg}(-z_2)$ em função de α.

b) Sabendo que $\text{Im}(z_1)= \text{Im}(z_2)$, determine z_2. Apresente o resultado na forma algébrica.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2008*)

47. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z + \bar{z} = 2$. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?



(1ª fase)

48. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ e $z_2 = 8cis0$ (i designa a unidade imaginária).

a) Mostre, sem recorrer à calculadora, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2.

b) No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_3 \cdot i^{46}$, respectivamente. Determine o comprimento do segmento [AB].

(1ª fase)

51. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

a) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, determine o valor de $\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z. Determine uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

(2ª fase)

(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2009*)

52. Para um certo número real positivo ρ e para um certo número real α compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, o número complexo ρcisα tem por imagem geométrica o ponto *P*, representado na figura 2. Qual é a imagem geométrica do número complexo $\frac{\rho}{2}\,cis(2\alpha)$?

(A) O ponto A (B) O ponto B
(C) O ponto C (D) O ponto D

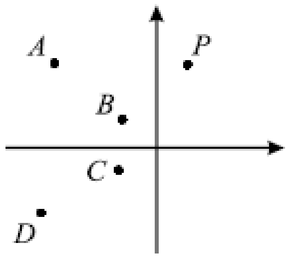
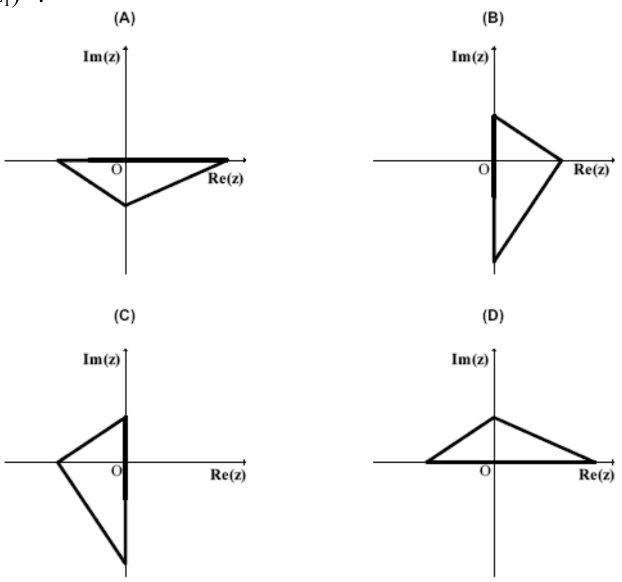


Figura 2

(Intermédio 3)

55. Seja *b* um número real positivo, e $z_1=bi$ um número complexo. Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?



(1ª fase)

56. Em ℂ, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = cis(\frac{5}{6}\pi)$.

a) Determine z_1 na forma trigonométrica, <u>sem recorrer à calculadora</u>.

b) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-i\, z_2)^n = -1$.

(1ª fase)

57. Seja *k* um número real, e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo. Qual é o valor de *k*, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

(2ª fase)

60. Considere, em ℂ, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respectivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de (–w) . Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que |w|=5. Determine a área do triângulo [ABC] .

(2ª fase)

$\boxed{E_8}$. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$. Considere o número complexo $z = i \cdot cis(\theta)$. Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de z ?

(A) $cis(-\frac{\pi}{2}-\theta)$ (B) $cis(\frac{\pi}{2}-\theta)$

(C) $cis(\frac{\pi}{2}+\theta)$ (D) $cis(\frac{3\pi}{2}+\theta)$

(Época especial)

$\boxed{E_9}$ Considere, em ℂ, o número complexo $w = 2cis(\frac{\pi}{6})$. No plano complexo, a imagem geométrica de *w* é um dos vértices do quadrado [ABCD], com centro na origem O, representado na figura 2. Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice D do quadrado?

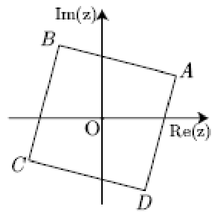


Fig. 2

(A) $2cis(\frac{3\pi}{2})$ (B) $2cis(\frac{7\pi}{4})$ (C) $2cis(\frac{11\pi}{6})$ (D) $2cis(\frac{5\pi}{3})$

(Época especial)

$\boxed{E_{11}}$ Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $(2cis\theta)^2 \times (1+\sqrt{3}\,i)$ pertença à bissectriz do 3.º quadrante.

(Época especial)

(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2010*)

61. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária. Determine $\frac{(1+2i)(3+i)-i^6+i^7}{3i}$, <u>sem recorrer à calculadora</u>. Apresente o resultado na forma $x+yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

(Intermédio 3)

62. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3cis(\frac{\pi}{8}-\theta)$. Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $-\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{5\pi}{8}$

(1ª fase)

63. Na Figura 3, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição
$\text{Re}(z) > 3$

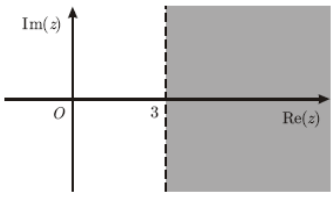


Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

(A) $\sqrt{3}cis\frac{\pi}{6}$ (B) $3\sqrt{3}cis\frac{\pi}{6}$ (C) $\sqrt{3}cis\frac{\pi}{2}$ (D) $3\sqrt{3}cis\frac{\pi}{2}$

(1ª fase)

64. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = cis\frac{\pi}{7}$ e $z_2 = 2+i$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o número complexo $w = \frac{3-i\times(z_1)^7}{z_2}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Mostre que $\left|z_1+z_2\right|^2 = 6+4\cos\frac{\pi}{7}+2sen\frac{\pi}{7}$

(1ª fase)

65. A Figura 2 representa um pentágono [ABCDE] no plano complexo. Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w
O vértice A tem coordenadas (1, 0). Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

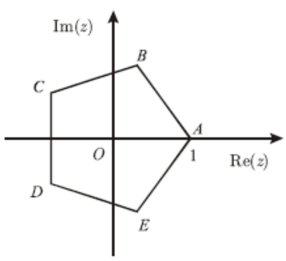


Figura 2

(A) $5cis\frac{6\pi}{5}$ (B) $cis\frac{6\pi}{5}$ (C) $cis(-\frac{\pi}{5})$ (D) $cis\frac{\pi}{5}$

(2ª fase)

66. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na Figura 3. A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6 ?

(A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissectriz dos quadrantes ímpares
(D) Bissectriz dos quadrantes pares

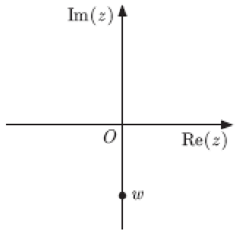


Figura 3

(2ª fase)

67. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o número complexo $w = \frac{z_1^4+4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1

(2ª fase)

$\boxed{E_{12}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z+\bar{z}) = 0\}$

Qual das rectas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real
(B) o eixo imaginário
(C) a bissectriz dos quadrantes pares
(D) a bissectriz dos quadrantes ímpares

(Época especial)

$\boxed{E_{13}}$ Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, os pontos P, Q, R, S e T. O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z. Qual dos pontos seguintes, representados na Figura 2, é a imagem geométrica do número complexo
$-i\times z$?

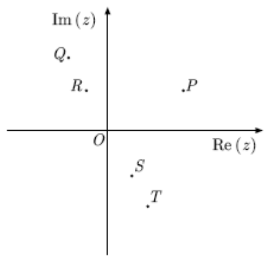


Figura 2

(A) Q (B) R (C) S (D) T

(Época especial)

$\boxed{E_{14}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \frac{(-1-i)^8}{(cis\frac{\pi}{8})^2}\times cis\frac{5\pi}{2}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Verifique que $z = 16cis\frac{\pi}{4}$

b) Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

(Época especial)

(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2011*)

68. Na Figura 2, está representada, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem O do referencial. Os pontos A, B e C pertencem à circunferência. O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $3+4i$
O ponto C pertence ao eixo imaginário.

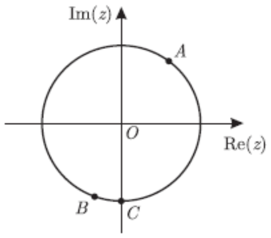


Figura 2

O arco BC tem $\frac{\pi}{9}$ radianos de amplitude.

Qual é o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto B?

(A) $5cis\frac{10\pi}{9}$ (B) $5cis\frac{25\pi}{18}$

(C) $7cis\frac{10\pi}{9}$ (D) $7cis\frac{25\pi}{18}$

(Intermédio 2)

69. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Considere a equação $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real 1. As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo. Determine o perímetro desse triângulo. Resolva este item <u>sem recorrer à calculadora</u>.

(Intermédio 2)

71. Na Figura 4, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular. Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.º quadrante;
- o ponto B está situado no 4.º quadrante;
- [AB] é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32cis\frac{\pi}{2}$

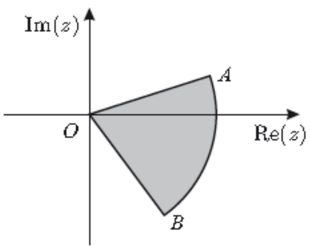


Figura 4

- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$. Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular AOB ?

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{4\pi}{5}$ (C) $\frac{2\pi}{5}$ (D) $\frac{8\pi}{5}$

(1ª fase)

72. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 1$, $z_2 = 5i$ e $z_3 = cis(\frac{n\pi}{40})$ Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$

Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio. Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

b) Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(1ª fase)

74. Na Figura 4, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6. Qual é o número complexo que pode ser igual a $(z_2 + z_4) \times i$?

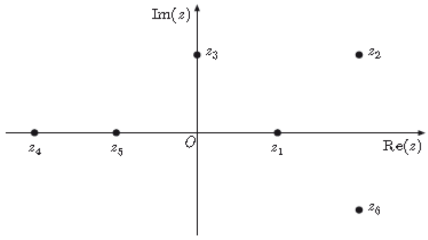


Figura 4

(A) z_1 (B) z_3 (C) z_5 (D) z_6

(2ª fase)

75. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

a) Considere $z_1 = 1+2i$ e $w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}cis\frac{5\pi}{4}}$ com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Determine o valor de b para o qual w é um número real.

b) Seja z um número complexo tal que $|z| = 1$. Mostre que $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$

(2ª fase)

$\boxed{E_{16}}$ Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, seis pontos, M, N, P, Q, R e S. Sabe-se que:

- o ponto M é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$
- o ponto N é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$. Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2 ?

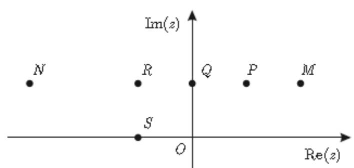


Figura 2

(A) ponto P (B) ponto Q (C) ponto R (D) ponto S

(1.ª fase especial)

$\boxed{E_{17}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2 + z + 1 = 0$. Determine $\frac{1}{w}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Seja z um número complexo. Mostre que $(\bar{z} + i)(z - i) = |z - i|^2$, para qualquer número complexo z

(1.ª fase especial)

$\boxed{E_{18}}$ Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k + 2) + p\,i$ e $z_2 = (3p - 4) + (2 - 5k)i$ dois números complexos.

Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2 ?
(A) $k=-1$ e $p=3$ (B) $k=1$ e $p=3$
(C) $k=0$ e $p=-2$ (D) $k=1$ e $p=-3$

(Época especial)

$\boxed{E_{19}}$ Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w. No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono [ABCDEFGH], representado na Figura 3. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo. Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono [ABCDEFGH] ?

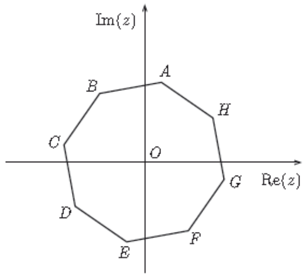


Figura 3

(A) $-w$ (B) $w+1$ (C) $i\times w$ (D) $i^3\times w$

(Época especial)

$\boxed{E_{20}}$ Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Considere $z_1 = 2+\sqrt{3}i + i^{4n+2014}$, $n\in\mathbb{N}$

Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z. Determine z. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Considere $z_2 = cis\,\frac{\pi}{4}$. No plano complexo, a região definida pela condição

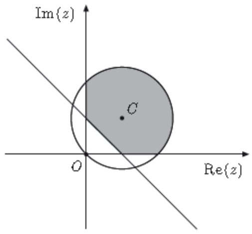
$\left|z-z_2\right| \le 1 \wedge \frac{\pi}{2} \le \arg(z) \le 2\pi \wedge |z| \ge \left|z-z_2\right|$ está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas a seguir.

(Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo]0, 2π])

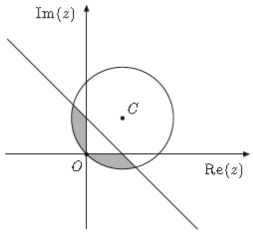
Sabe-se que, em cada uma das opções:
• O é a origem do referencial;
• C é a imagem geométrica de z_2
• $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correcta.

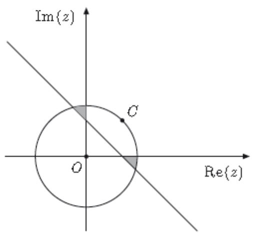
I



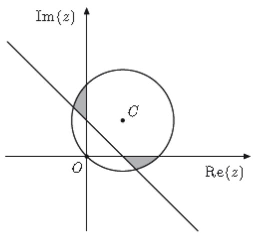
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:
• indique a opção correcta;
• apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

(Época especial)

Soluções: 1. B 2. $1\pm i\sqrt{3}$; $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ 3. B 4. $|z|<1 \wedge \pi/2 < \arg(z) < \pi$ 5. B 6. $|z|=\sqrt{2}/2$ 7. D 8. $\sqrt{3}+i$
9. A 10. 3; 3º 11.B 12. 6i; $|z|<2 \wedge \pi/3 < \arg(z) < 11\pi/15$ 13. D 14. {3;-4i;-3}; 2-i 15. A
16. 6+8i; não 17. A 18. $-4;2+2\sqrt{2}$ 19. B 20. $-2\sqrt{3}+2i$ 21. B 22. –2 e 2; $5\pi/4$ 23. A 24. $2i$; $|z-2+2i|=3\sqrt{2}$
25. B 26. $3i$ 27. C 28. $\sqrt[4]{2}$ cis $\pi/12$, $\sqrt[4]{2}$ cis $7\pi/12$, $\sqrt[4]{2}$ cis $13\pi/12$, $\sqrt[4]{2}$ cis $19\pi/12$; $-2+4i$ 29. C 30. $\sqrt{8}$ cis$(5\pi/4)$
32. B 33. $-24-5i$; 5cis$(\pi/2-\alpha)$ 34. C 35. $\sqrt{2}/2$ cis$(\pi/4)$ 36. A 37. $-1-\sqrt{3}/3\, i$ 38. D 39. $\sqrt{2}$ cis$(-\pi/4)$; $3\pi/16$
40. A 41. 25cis$(\pi/7)$; $\sqrt{3}+i$ 42. D 43. $\pi/6$ 44. A 45. $3\pi/2+\alpha$; $-48+12i$ 46. B 47. B 48. 4
49. D 50. A 51. $4/5-2i/5$; $\sqrt{2}$ cis$(5\pi/4)$ 52. A 53. $3i$ 54. C 55. C 56. $\sqrt{2}/2$cis$(\pi/4)$; 3 57. C 58. A
59. $-11/4+1/4\, i$ 60. 24 61. $2-2/3\, i$ 62. D 63. B 64. $\sqrt{2}$cis $\pi/4$ 65. B 66. A 67. $4\sqrt{2}$cis $\pi/4$; $|z-3|=\sqrt{5}$
68. B 69. $4+2\sqrt{5}$ 70. B 71. B 72. cis0, $4cis(-\frac{\pi}{2})$ e $4cis\,\frac{\pi}{2}$; 30 73. B 74. C 75. 3
E1. C E2. 2 E3. D E4. $\sqrt[3]{2}cis\,\frac{11\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{2}$ E5. A E6. C E7. ¼ cis$(\pi/4)$; 32 E8. A E9. D
E10. $2+i$ E11. $11\pi/24$ E12. B E13. D E14. 8 E15. A E16. C E17. cis$(-2\pi/3)$ E18. B E19. C E20. –8; IV

O professor: RobertOliveira