

**6.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 5**

Duração: 90 minutos  
3.º Período - 01/06/05

Classificação:

|  |  |   |  |
|--|--|---|--|
|  |  | , |  |
|--|--|---|--|

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

O professor:

**Grupo I**

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Seja  $S$  o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ). Sabe-se que:

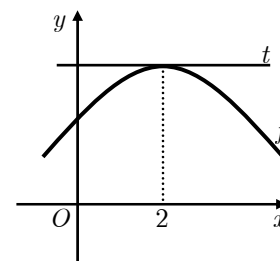
$$P(A) = 0,4; \quad P(\overline{B}) = 0,7; \quad P(A \cup B) = 0,5.$$

Qual é o valor de  $P(A \cap B)$ ?

- (A) 0,1                      (B) 0,2                      (C) 0,3                      (D) 0,4

2. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de  $f$  e a recta  $t$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 2.

Qual pode ser o valor de  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x)}{f'(x)}$ ?



- (A) 0                      (B) 1                      (C)  $+\infty$                       (D)  $-\infty$

3. A função  $g$  está definida, em  $\mathbb{R}$ , por  $g(x) = \cos(kx)$ ,  $k \neq 0$ .

Esta função é periódica e o seu período é igual a  $\frac{\pi}{2}$ . Qual é o valor de  $k$ ?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4

4. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:  $w$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$ .

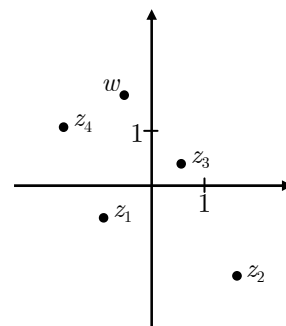
Qual é o número complexo que pode ser igual a  $2i - w$ ?

(A)  $z_1$

(B)  $z_2$

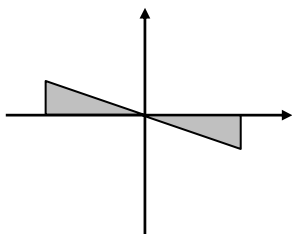
(C)  $z_3$

(D)  $z_4$

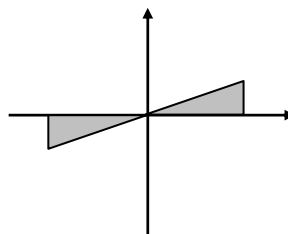


5. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as raízes quadradas do número  $8 - 6i$ ?

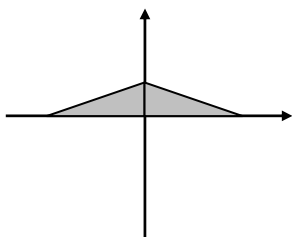
(A)



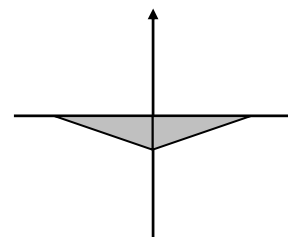
(B)



(C)



(D)



6. Na figura está representado, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem do referencial e raio igual a 1.

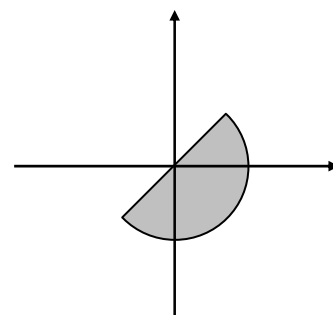
Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A)  $|z| \leq 1 \wedge |z - 1| \leq |z - i|$

(B)  $|z| \leq 1 \wedge |z + 1| \geq |z - i|$

(C)  $Re(z) \leq 1 \wedge |z - 1| \leq |z - i|$

(D)  $Im(z) \geq 1 \wedge |z + 1| \geq |z - i|$



## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

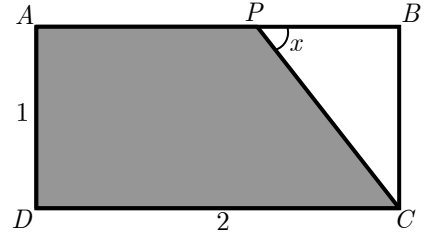
**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura está representado a sombreado o trapézio  $[APCD]$ .

Tem-se que:

»  $[ABCD]$  é um rectângulo de comprimento 2 e altura 1;

»  $x$  designa a amplitude, em radianos, do ângulo  $BPC$ ,  $x \in ]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ .



- 1.1. Mostre que a área do trapézio  $[APCD]$  é dada, em função de  $x$ , por  $f(x) = 2 - \frac{1}{2 \operatorname{tg} x}$

- 1.2. Sem usar a calculadora, calcule  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$  e interprete geometricamente o valor obtido.

- 1.3. O gráfico de  $f$  contém um único ponto cuja ordenada é igual ao quadrado da abcissa.

Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

2. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam  $z_1 = -2 - 2i$  e  $z_2 = 8 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$ .

Sem usar a calculadora, resolva as seguintes alíneas.

- 2.1. Escreva  $z_1$  na forma trigonométrica e  $z_2$  na forma algébrica.

- 2.2. Determine  $\frac{z_1}{2-3i}$  na forma algébrica.

- 2.3. Mostre que  $z_1$  é uma raiz quarta de  $-64$ .

- 2.4. Resolva, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $z^3 - z_2 = 0$ , apresentando as soluções na forma trigonométrica.

- 2.5. Sabe-se que o simétrico de  $z_2$  é uma raiz de índice 8 de um número complexo  $z$ .

Determine, na forma trigonométrica, outra raiz de  $z$  cuja imagem geométrica está situada no quarto quadrante.

3. No plano complexo, considere um número complexo  $w$  cuja imagem geométrica é um ponto  $A$  situado no primeiro quadrante e pertencente à recta definida pela condição  $\operatorname{Im}(z) = 3$ .

Considere ainda o ponto  $B$ , imagem geométrica de  $\bar{w}$  (conjugado de  $w$ ).

Sendo  $O$  a origem do referencial e sabendo que o perímetro do triângulo  $[AOB]$  é 16, determine  $w$ , na forma algébrica.

FIM

## Formulário

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

### Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n - 1\}$

### Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

### Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

## COTAÇÕES

|                                      |                           |                           |   |
|--------------------------------------|---------------------------|---------------------------|---|
| <b>Grupo I</b><br><b>(60 pontos)</b> | Cada resposta certa: + 10 | Cada resposta errada: – 2 | Cada questão não respondida ou anulada: 0 |
|--------------------------------------|---------------------------|---------------------------|---|

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

|  |                            |                            |                          |
|--|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| <b>Grupo II</b><br><b>(140 pontos)</b> | <b>1</b> ..... <b>46</b>   | <b>2</b> ..... <b>78</b>   | <b>3</b> ..... <b>16</b> |
|  | <b>1.1</b> ..... <b>16</b> | <b>2.1</b> ..... <b>14</b> |                          |
|  | <b>1.2</b> ..... <b>14</b> | <b>2.2</b> ..... <b>16</b> |                          |
|  | <b>1.3</b> ..... <b>16</b> | <b>2.3</b> ..... <b>16</b> |                          |
|  |                            | <b>2.4</b> ..... <b>18</b> |                          |
|  | <b>2.5</b> ..... <b>14</b> |                            |                          |