

5.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 5

Duração: 90 minutos
3.º Período - 27/04/05

Classificação: ,

Nome: _____

N.º: _____

O professor: _____

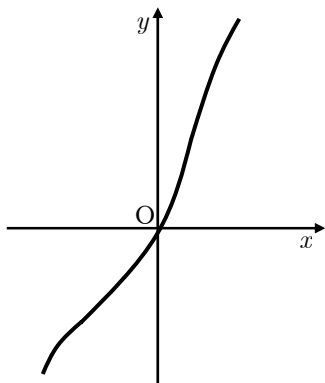
Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

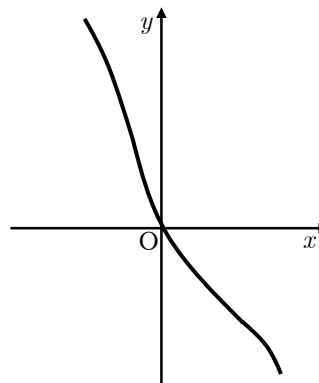
1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , e tal que a **primeira derivada** está definida por $f'(x) = \cos x - 2$.

Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico de f ?

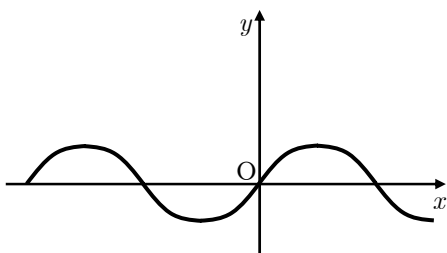
(A)



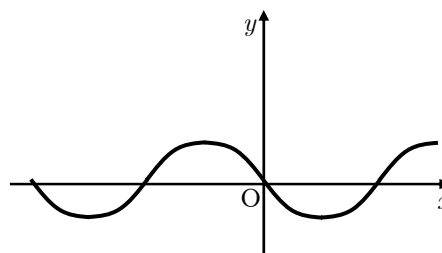
(B)



(C)



(D)



2. De uma função real g , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que $g'(x) \neq 0$ e que a recta de equação $y = 2$ é a única assíntota do gráfico de g .

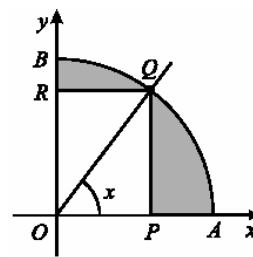
Dada a sucessão definida por $u_n = \sqrt{n}$, qual é a proposição **falsa**?

- (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(-u_n) = -2$ (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(-u_n) = 2$ (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = +\infty$ (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(-u_n) = -\infty$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , um arco de circunferência (de raio 1) AB , de centro na origem do referencial.

O ponto Q move-se ao longo desse arco. Os pontos P e R , situados sobre os eixos Ox e Oy , respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q , de tal forma que o segmento de recta $[PQ]$ é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento de recta $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox .

Para cada posição do ponto Q , seja x a amplitude do ângulo AOQ .



Qual das expressões seguintes dá a área do rectângulo $[OPQR]$ em função de x ?

- (A) $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ (B) $\text{sen } x \times \text{cos } x$ (C) $\text{sen}^2 x$ (D) $\text{cos}^2 x$

4. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x > 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Relativamente à continuidade da função h no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) É contínua à direita e descontínua à esquerda (B) É contínua à esquerda e descontínua à direita
(C) É descontínua à esquerda e à direita (D) É contínua à direita e à esquerda

5. Numa prateleira de um supermercado com cem embalagens de mostarda, há **duas** embalagens fora do prazo de validade. Sabe-se que a probabilidade de o conteúdo destas embalagens estar estragado é igual a 0,4. Se a mostarda estiver dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragada é 0,01.

Escolhe-se, ao acaso, uma embalagem de mostarda **estragada**.

Qual é a probabilidade de ela estar fora de prazo?

- (A) $\frac{10}{29}$ (B) $\frac{20}{41}$ (C) $\frac{30}{53}$ (D) $\frac{40}{89}$

6. Em cada cinco remates à baliza, o andebolista Anselmo marca três golos (em média). Seja X a variável "número de golos marcado pelo Anselmo em cada dois remates".

Qual é a distribuição de probabilidades de variável X ?

(A)

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

(B)

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$(\frac{3}{5})^2$	$2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$	$(\frac{2}{5})^2$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$(\frac{2}{5})^2$	$2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$	$(\frac{3}{5})^2$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Uma espécie de tigres está ameaçada de extinção. Admita que o número de exemplares, em **milhares**, é dado por $f(t) = ke^{-0,027t}$, para certos valores de t .

(considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao **início** do ano 2000).

- 1.1. Nesta alínea, considere $k = 6,86$.

De acordo com este modelo matemático, qual será a população desta espécie de tigres no **final** do presente ano (2005)? Apresente o resultado em milhares de tigres, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 1.2. Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{f(t+1)}{f(t)}$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às centésimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

- 1.3. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

Determine k sabendo que se prevê, no início de 2010, uma **diminuição** do número de tigres à razão de 100 exemplares por ano.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Considere a função g definida em $[0, \pi]$ por $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + x \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$.

- 2.1. Mostre que $g(x) = \operatorname{sen}(2x) + \sqrt{3}x$

- 2.2. **Sem recorrer à calculadora**, calcule $g'(0)$ usando a definição de derivada num ponto.

- 2.3. **Sem recorrer à calculadora** (excepto para cálculos numéricos), prove que $\exists x \in]0, \pi[: g(x) = 2$

- 2.4. Usando **processos analíticos**, mostre que a função g tem máximo relativo para $x = \frac{5\pi}{12}$ e um mínimo relativo para $x = \frac{7\pi}{12}$.

- 2.5. Seja A o ponto maximizante do gráfico de g . A recta tangente ao gráfico de g no ponto A intersecta o gráfico de g noutro ponto, digamos B .

Determine a abcissa de B .

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Apresente os cálculos intermédios arredondados às centésimas e o valor pedido arredondado às décimas.

3. A função h está definida por $h(x) = tg(0,5x)$.

Prove que, para qualquer $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{1 + tg^2(0,5x)}{2}$

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$tg(a + b) = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tg\ a \cdot tg\ b}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(tg u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada resposta errada: - 2	Cada questão não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	---------------------------	---------------------------	-------------------------------------------

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II (140 pontos)	1 44	2 81	3 15
	1.1 12	2.1 14	
	1.2 16	2.2 16	
	1.3 16	2.3 17	
		2.4 17	
	2.5 17		