



www.esaas.com

## 4.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

2.º Período

26/02/07

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

Classificação:

  , 

O professor: \_\_\_\_\_

## Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Uma empresa vai admitir novas carrinhas, sendo a selecção feita de entre doze candidatas: seis de caixa aberta e seis de caixa fechada.

Devido à natureza do trabalho, vão ser compradas ou duas carrinhas de caixa aberta ou três de caixa fechada. De quantas maneiras diferentes podem ser feitas as escolhas?

(A)  ${}^7C_2$

(B)  ${}^7C_3$

(C)  ${}^6C_2$

(D)  ${}^6C_3$

2. Numa cidade com 5000 habitantes, sabe-se que o número de pessoas infectadas com um tipo de vírus da gripe é dado,  $t$  dias após a contagem, por uma função do tipo

$$g(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Ct}}, \text{ com } A, B \text{ e } C \text{ constantes positivas.}$$

Além disso, sabe-se também que, no pior dos casos, metade da população pode ficar infectada pelo vírus. Ao escolher, ao acaso, um habitante dessa cidade oito dias depois, qual é a probabilidade de ele estar infectado com o vírus?

(A)  $\frac{B}{A}$

(B)  $\frac{g(8)}{A}$

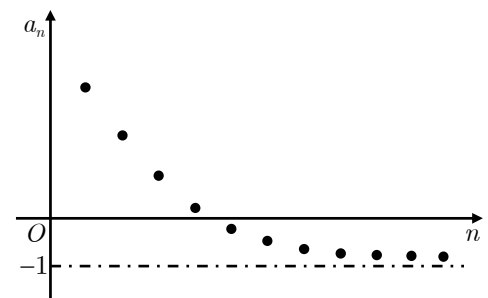
(C)  $\frac{A}{5000}$

(D)  $\frac{g(8)}{5000}$

3. Considere a sucessão  $(a_n)$  representada graficamente ao lado. Como sugere a figura,  $(a_n)$  é estritamente decrescente e o seu gráfico admite a assíntota de equação  $y = -1$ .

Considere ainda a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ .

Quanto ao limite de  $f(a_n)$ :



(A) É igual a 0

(B) É igual a  $-\infty$

(C) É igual a  $+\infty$

(D) Não existe

4. “Um dividir-por-zero (...) O CMD é calculado como uma fracção... a despesa total dividida pelo número de decifrações. (...) Quando o denominador é zero – explicou Midge – o quociente chega ao infinito. Os computadores detestam infinitos, de modo que escrevem noves seguidos.”  
 FORTALEZA DIGITAL, Dan Brown

Indique o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1}$ .

- (A)  $\frac{e}{2}$                       (B)  $e$                       (C) 0                      (D) 1

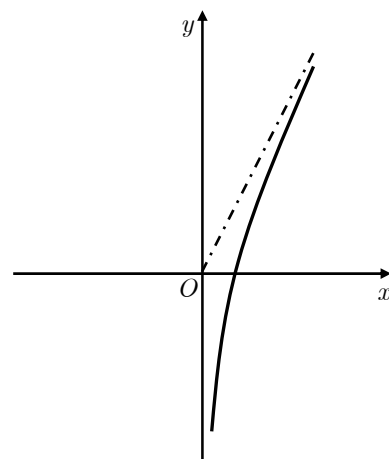
5. Na figura ao lado está parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sabe-se que:

- $g$  é uma função par;
- A recta de equação  $y = 2x$  é uma assíntota do gráfico de  $g$ .

Sejam  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x]$  e  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$ .

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A)  $a = 2$  e  $b = -2$                       (B)  $a = 2$  e  $b = 2$   
 (C)  $a = 0$  e  $b = -2$                       (D)  $a = 0$  e  $b = 2$

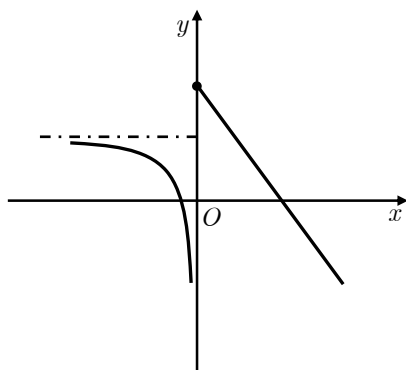


6. Sobre uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

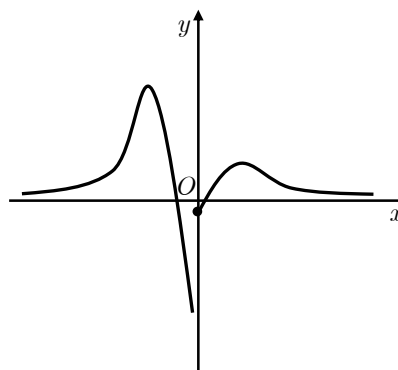
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$ ;
- O seu gráfico admite apenas duas assíntotas:  $x = k$  e  $y = k$ , sendo  $k$  um número real.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função  $h$  num referencial o.n.?

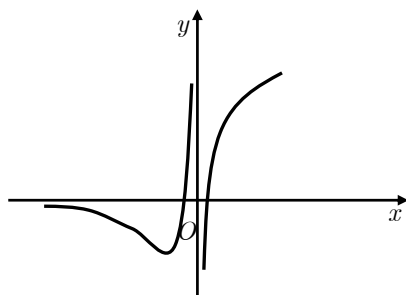
(A)



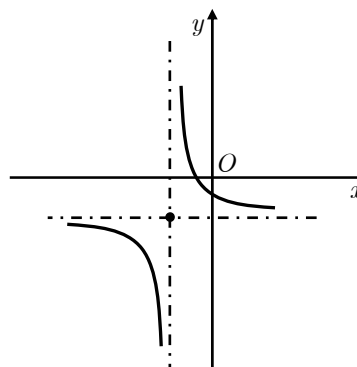
(B)



(C)



(D)



## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. “O homem inseriu a placa no leitor de cartões e ligou o instrumento.  
- Experimenta todas as combinações possíveis – explicou.”

O TERCEIRO GÉMEO, Ken Follet

O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0559.

- 1.1. Quantos códigos diferentes existem com um e um só algarismo zero?
- 1.2. Admita que o código de um certo cartão multibanco tem os dois primeiros algarismos diferentes. Qual é a probabilidade de esse código representar um número *capicua*? Apresente o resultado na forma de dízima.

2. O formaldeído é um gás cáustico, incolor e cancerígeno, que pode ser libertado por diversos tipos de móveis novos. Suponha que um certo aparelho mediu a concentração, em microgramas por metro cúbico ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ), de formaldeído presente numa habitação. Suponha ainda que essa concentração foi dada, após  $t$  dias, por

$$C(t) = 8 + \frac{28 \ln(t+k)}{t+1}, \quad t \geq 0,$$

sendo  $k$  uma constante real.

- 2.1. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva as duas alíneas seguintes.

- 2.1.1. Calcule  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$  e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.
- 2.1.2. Supondo que, após o sexto dia, a concentração de formaldeído presente na habitação foi igual a  $17 \mu\text{g}/\text{m}^3$ , determine o valor de  $k$ . Apresente o resultado arredondado às décimas.

- 2.2. Admita agora que  $k = 4$ .

- 2.2.1. Determine a concentração de formaldeído presente na habitação após duas semanas. Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.
- 2.2.2. Segundo uma associação de defesa do consumidor, a concentração de formaldeído presente na habitação:
- não deve nunca ser superior a  $100 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ;
  - deve, após 28 dias, ser inferior a  $10 \mu\text{g}/\text{m}^3$ .

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar se:

- a concentração de formaldeído obedece ao primeiro critério, indicando o seu máximo;
- a concentração de formaldeído obedece ao segundo critério, indicando a partir de que dia essa concentração é inferior a  $10 \mu\text{g}/\text{m}^3$ .

Numa pequena composição (com cinco a dez linhas), explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas (arredondadas às décimas) de pontos relevantes.

3. Considere a função de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+2}}{-x-1} & \text{se } x < -2 \\ \frac{x^3+2x^2}{4-x^2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$ .

Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva as alíneas seguintes.

3.1. Mostre que  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$

3.2. Estude a função  $f$  quanto à existência de assintotas do seu gráfico.

3.3. Na figura estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ ,

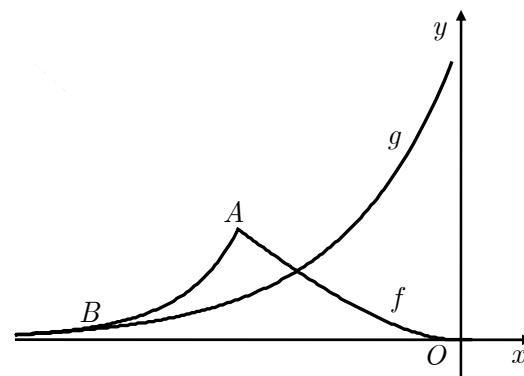
partes dos gráficos das funções  $f$  e  $g$ , definida por

$$g(x) = e^{x+1}$$

- O ponto  $A$  tem abcissa  $-2$ ;
- O ponto  $B$  é um dos pontos de intersecção entre os gráficos de  $f$  e de  $g$ .

Determine a abcissa de  $B$ .

**Nota:** tenha em conta que  $x + 1 = x + 2 - 1$ .



4. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}^+$ , cujo gráfico admite uma assintota paralela à bissetriz dos quadrantes pares. Seja ainda  $h$  uma função de domínio  $\mathbb{R}^+$  e tal que  $h(x) = f(x) + 2x \ln \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]$ .

Prove que o gráfico de  $h$  admite uma assintota paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

FIM

### Formulário

<p><b>Limites notáveis</b></p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
--	--

### COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> <b>(54 pontos)</b>	Cada resposta certa: +9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
--------------------------------------	-------------------------	---

<b>Grupo II</b> <b>(146 pontos)</b>	<b>1.</b> ..... <b>23</b>	<b>2.</b> ..... <b>55</b>	<b>3.</b> ..... <b>53</b>	<b>4.</b> ..... <b>15</b>
	1.1.....10	2.1.1.....14	3.1.....16	
	1.2.....13	2.1.2.....14	3.2.....21	
	2.2.1.....11	3.3.....16		
	2.2.2.....16			