



Escola Secundária de Francisco Franco (2010/2011)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6/7

www.esffranco.edu.pt

2.º Período

08/02/11

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

--	--	--

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. “- Estamos a contactar as companhias aéreas para ver se ela tomou um avião. Acho que as probabilidades são de mil contra uma.”

A RUA ONDE VIVEM, Mary Higgins Clark

Durante um certo período de tempo, aterraram num aeroporto português doze aviões, sendo nove deles de baixo custo (*low cost*). Dos doze aviões, sabe-se que quatro vieram de um outro aeroporto português.

Seja X a variável aleatória «número de aviões de baixo custo que vieram de outro aeroporto português».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X ?

(A)

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{12C_4}$	$\frac{108}{12C_4}$	$\frac{252}{12C_4}$	$\frac{126}{12C_4}$

(B)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{12C_4}$	$\frac{280}{12C_4}$	$\frac{207}{12C_4}$

(C)

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{126}{12C_4}$	$\frac{252}{12C_4}$	$\frac{108}{12C_4}$	$\frac{9}{12C_4}$

(D)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{207}{12C_4}$	$\frac{280}{12C_4}$	$\frac{8}{12C_4}$

2. Sejam A e B dois acontecimentos **incompatíveis e equiprováveis** de um espaço de resultados Ω tais que $P(A) = 0,3$

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$?

- (A) 0 (B) 0,4 (C) 0,7 (D) 1

3. A função g está definida, em \mathbb{R} , por $g(x) = 10^{2x}$

O gráfico de g intersecta a recta de equação $y = 3$ no ponto de abscissa

- (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\log(\sqrt{5})$ (D) $\log(\sqrt{3})$

4. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

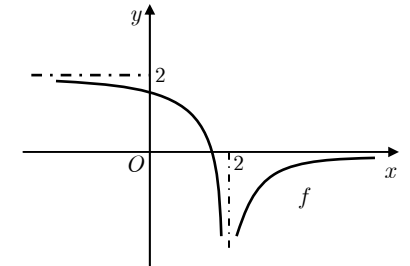
Tal como a figura sugere, as rectas de equações $x = 2$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de f

Considere a sucessão definida por

$$u_n = \frac{\ln(n^3)}{n}$$

Qual pode ser o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$?

- (A) $-\infty$ (B) $-0,3$ (C) 1,6 (D) 2



5. Considere a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^7 + 7^x & \text{se } x < 1 \\ 8 & \text{se } x = 1 \\ \frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Quanto à continuidade no ponto de abscissa 1, a função h

- (A) É contínua somente à sua esquerda; (B) É contínua somente à sua direita;
 (C) É contínua nesse ponto; (D) É descontínua à esquerda e à direita.

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Ao abrigo do programa *Erasmus*, dezenas de jovens de todo o mundo encontram-se a estudar na universidade de Valência (Espanha).



Admita que:

- num certo bairro residencial A moram 25 jovens, um quinto dos quais portugueses;
- num certo bairro residencial B moram 35 jovens, 40% dos quais portugueses.

- 1.1. Seis amigos do **mesmo bairro** vão juntos para a universidade. Qual é a probabilidade de serem todos portugueses? Apresente o resultado na forma de dízima, com quatro casas decimais.

- 1.2. Considere agora que dois jovens vão entrar em casa, **um de cada vez**. Sejam os acontecimentos:

X : «esses dois jovens moram no bairro residencial A»

Y : «apenas o primeiro jovem a entrar em casa é português»

Numa pequena composição e **sem utilizar** a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(Y | X)$, apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível.

2. Ao longo de alguns dias, a temperatura em graus Celsius de uma habitação foi dada, aproximadamente, pela função definida por

$$C(t) = 10 + 6 \ln\left(\frac{35}{t+11}\right)$$

Sabe-se que $C(0)$ corresponde à temperatura t dias após as zero horas do dia 20 de Janeiro.

- 2.1. Determine a temperatura na habitação às zero horas do dia 15 de Janeiro. Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às décimas.
- 2.2. Usando processos exclusivamente analíticos, indique quando é que a temperatura na habitação foi igual a 11 graus Celsius. Apresente na sua resposta o mês, o dia e entre que horas se verificou essa temperatura (por exemplo, *entre as 9 e as 10 horas* ou *entre as 15 e as 16 horas*).

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, três casas decimais.

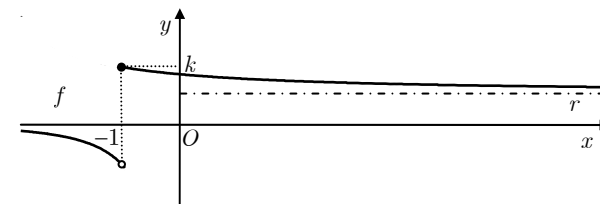
3. É dada a função de domínio \mathbb{R} definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+1}-1}{x^2+x} & \text{se } x < -1 \\ k & \text{se } x = -1 \\ 1 - \frac{x^2-1}{3x^2+15x+12} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Na figura está representada parte do gráfico da função f

Tal como a figura sugere:

- r é uma assíntota do gráfico de f
- $f(-1) = k$



Resolva os itens seguintes **sem usar a calculadora**.

- 3.1. Determine o valor de k e mostre que, tal como a figura sugere, a função f é contínua à direita do ponto de abcissa -1 e descontínua à esquerda desse ponto.

- 3.2. Determine a equação da recta r

4. Considere a função h definida por $h(x) = \log_4(x - a)$, sendo a um número real.

- 4.1. Nesta alínea, suponha que $a = -3$ e seja g a função definida por

$$g(x) = e^{5-x}$$

Considere o triângulo $[ABC]$ de área igual a 3 unidades sendo:

- A um ponto do gráfico de h de abcissa positiva
- B o ponto de intersecção entre os gráficos de h e de g
- C o ponto do eixo Ox de abcissa igual à de B e superior à de A

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A (arredondado às décimas). Apresente na sua resposta:

- um referencial xOy e partes relevantes dos gráficos de ambas as funções
- o triângulo $[ABC]$
- as coordenadas relevantes dos pontos, com duas casas decimais

4.2. Suponha agora que se têm os seguintes dados:

- b é um número real inferior a 20
- $h(b) = \log_2(a)$

Sem usar a calculadora, prove que $x = 5$ não pode ser a equação da assíntota vertical do gráfico de h

Sugestão: use o método de redução ao absurdo.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: +10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
------------------------	--------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....40	2.....35	3.....35	4.....40
	1.1.....20	2.1.....15	3.1.....20	4.1.....20
	1.2.....20	2.2.....20	3.2.....15	4.2.....20

Formulário

Probabilidades

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$