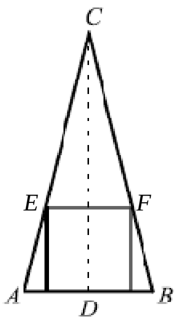
www.esffranco.edu.pt

Itens para os testes de 11.º ano
Geometria – Matemática A
2010/2011

1. Na figura estão representados um triângulo isósceles $[ABC]$ e um quadrado inscrito nesse triângulo.
A altura relativa à base $[AB]$ é o segmento de recta $[CD]$, representado a tracejado.
Sabe-se que $\overline{AB} = 4\,cm$ e que $\overline{CD} = 8\,cm$

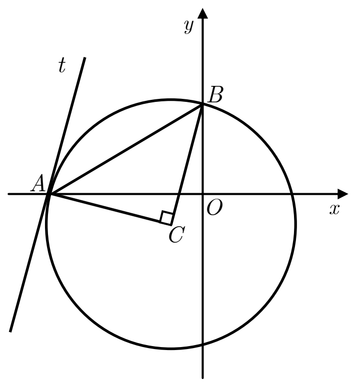


1.1. Qual é o valor de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$?

1.2. Mostre que o lado do quadrado da figura é $\frac{8}{3}$ e, atendendo a que, para qualquer x se tem $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, determine o valor de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FB}$

(Teste intermédio do 10.º ano de Janeiro de 2010 – adaptação)

2. No referencial o.n. xOy ao lado, estão uma circunferência e um triângulo $[ABC]$, rectângulo em C
Os pontos A e B pertencem à circunferência e têm coordenadas, respectivamente, $(-5, 0)$ e $(0, 3)$
A recta t é tangente à circunferência no ponto A e a sua equação reduzida é $y = 4x + 20$



2.1. Determine o raio r da circunferência.

2.2. Determine, em radianos a menos de 0,01, a amplitude da inclinação da recta AB

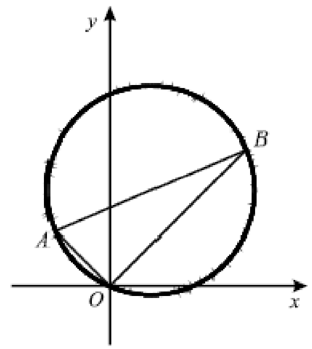
2.3. Escreva a equação vectorial de uma recta perpendicular à recta AB e que passa no ponto $P(2, -8)$

2.4. Escreva, usando o produto escalar, a equação reduzida da mediatriz do segmento $[AB]$

2.5. Determine, no sistema sexagesimal, a amplitude do ângulo formado pelas rectas t e AB

2.6. Determine as coordenadas do ponto C sabendo que elas são iguais.

3. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[AOB]$ e a respectiva circunferência circunscrita. Sabe-se que:



- a semi-recta $\dot{O}A$ é a bissectriz do 2.º quadrante
- a semi-recta $\dot{O}B$ é a bissectriz do 1.º quadrante
- a ordenada do ponto B excede em 3 unidades a ordenada do ponto A

3.1. Seja m o valor da norma de $\overrightarrow{AO}$. Prove que

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = m^2$$

3.2. Calcule a abcissa do ponto A sabendo que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = 32$

3.3. Suponha agora que a ordenada do ponto A é 2. Usando o **produto escalar** de vectores, escreva:

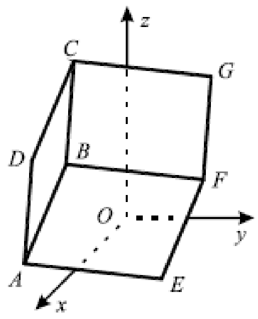
3.3.1. Uma equação simplificada da circunferência da figura;

3.3.2. A equação reduzida da recta tangente à circunferência da figura no ponto A;

3.3.3. A equação reduzida da mediatriz do segmento de recta $[AB]$.

(Itens do 10.º ano de Novembro de 2009 – adaptação)

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura). Admita que:



- o ponto A tem coordenadas $(11,-1,2)$
- o ponto B tem coordenadas $(13,2,8)$
- o ponto E tem coordenadas $(8,5,0)$
- o ponto C pertence ao plano xOz e ao plano de equação $z=11$
- $2x+3y+6z=80$ é uma equação do plano CBF

4.1. Escreva as equações cartesianas da recta CH

4.2. Mostre que $6x+2y-3z=58$ é uma equação do plano ABF

4.3. Escreva a equação geral do plano CBE
Nota: o plano CBE é o plano mediador de um segmento cujos extremos são dois dos vértices do cubo.

4.4. Um professor lançou o seguinte desafio:

"*Como é que se pode descobrir as coordenadas do ponto de intersecção da recta BF no plano xOy?*"

A Adelaide respondeu: "*Pode achar-se a equação vectorial da recta BF e, sabendo que $z=0$, descobrir o valor do parâmetro k para depois determinar a abcissa e a ordenada.*"

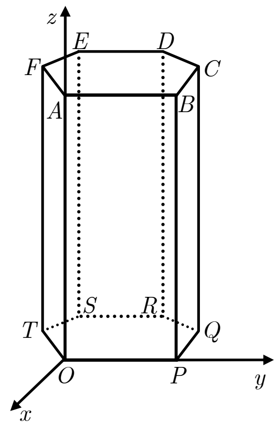
O Arnaldo respondeu: "*Basta resolver o sistema formado pelas equações dos planos CBF, ABF e xOy e determinar a abcissa e a ordenada (já que a cota é 0).*"

Sem usar a calculadora, determine as coordenadas do ponto pedido, resolvendo das duas maneiras propostas pela Adelaide e pelo Arnaldo.

(Teste intermédio do 10.º ano de Janeiro de 2010 – adaptação)

http://roliveira.pt.to

5. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular $[ABCDEFOPQRST]$ de aresta 3. Sabe-se que:



- A base inferior do prisma está contida no plano xOy;
- A base superior do prisma está contida no plano de equação $z=8$;
- O eixo Oy contém a aresta $[OP]$;
- O eixo Oz contém a aresta $[OA]$.

5.1. Justifique que as coordenadas do ponto Q são $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{9}{2},0\right)$

5.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta BC com o plano xOz

5.3. O triângulo $[TPQ]$ é recto no ponto P? Justifique, pelo menos de duas maneiras, a resposta.

5.4. Seja k a cota de um ponto X pertencente à aresta $[AO]$. Determine os valores possíveis para k de modo que o triângulo $[BXQ]$ seja rectângulo no ponto X.
Apresente o(s) valor(es) pedido(s) arredondado(s) às centésimas.

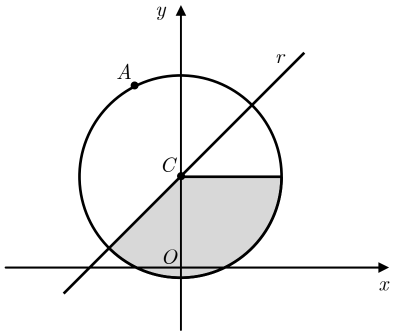
5.5. Mostre que $\vec{u}(1,\sqrt{3},0)$ é um vector perpendicular ao plano PQC e escreva uma equação deste plano.

5.6. Escreva uma equação do plano OBY, sendo Y um ponto de coordenadas $(1,1,1)$

5.7. Determine, em **graus**, a amplitude do ângulo PAB, apresentando o resultado arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5.8. Determine, em **radianos**, a amplitude do ângulo PAQ, apresentando o resultado arredondado às centésimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

6. Na figura ao lado está representado um referencial o.n. xOy. Sabe-se que:



- A equação da circunferência é $x^2 + (y-2)^2 = 5$
- O ponto A pertence à circunferência, tem abcissa -1 e ordenada superior a 2
- A recta r é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e passa no ponto C, centro da circunferência

6.1. Determine a área da região sombreada.

6.2. Escreva reduzida da equação da recta r

6.3. Determine a amplitude, em graus e arredondado às décimas, da inclinação da recta AC

6.4. Usando o **produto escalar** de vectores, mostre que a equação da mediatriz do segmento $[AC]$ é $y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{4}$

6.5. Escreva a equação reduzida de uma recta perpendicular à mediatriz do segmento $[AC]$ e que passa no ponto $B(5,3)$

6.6. Determine, no sistema circular, a amplitude do ângulo formado pela mediatriz do segmento $[AC]$ e a recta r. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

7. No trapézio rectângulo $[ABCD]$ da figura, sabe-se que $\overline{AP} = \overline{BP}$

Seja a a área do trapézio. Mostre que

$a = \overline{AP} \cdot \left(\frac{\overline{AB} + 2\overline{PD}}{2} \right)$