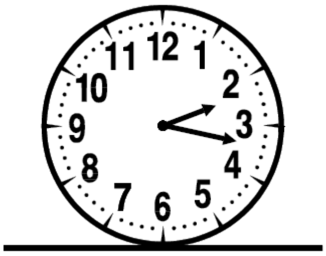
Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática B – 11.º ano

Movimentos periódicos. Funções trigonométricas.

Exercícios saídos em Testes intermédios e em Exames (desde 2006)

1. Na figura está representado um relógio de uma estação de caminho de ferro. O mostrador é um círculo e está apoiado numa barra.



Sabe-se que, t segundos após as zero horas,

• a distância (em metros), da extremidade do ponteiro das horas à barra, é dada por

$h(t) = 1 + \frac{5}{10}\cos\left(\frac{\pi}{21\,600}\,t\right)$

• a distância (em metros), da extremidade do ponteiro dos minutos à barra, é dada por

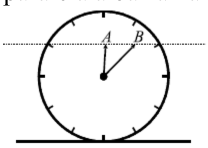
$m(t) = 1 + \frac{7}{10}\cos\left(\frac{\pi}{1\,800}\,t\right)$

Nota: tanto em h como em m, o argumento da função co-seno está expresso em radianos.

a) Verifique que o ponteiro dos minutos tem mais20 cm do que o ponteiro das horas.

b) Mostre que 3600 é período da função m e interprete este valor no contexto da situação apresentada.

c) Seja A a extremidade do ponteiro das horas e seja B a extremidade do ponteiro dos minutos. Tal como a figura junta ilustra, passado pouco tempo das zero horas, a recta AB é paralela à barra na qual o relógio está apoiado.



Pouco antes da 1 hora (da manhã), há outro instante em que isso acontece. Determine-o, apresentando o resultado em horas, minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Sugestão: equacione o problema e, recorrendo à sua calculadora, resolva graficamente a equação obtida.

(Intermédio 2006)

2. Para analisar o som produzido pela vibração de um diapasão, recolheram-se alguns dados com um sensor ligado a uma calculadora gráfica. O sensor mede a variação de uma certa grandeza (que designaremos por y), ao longo do tempo (que designaremos por x). A partir dos dados, recolhidos em intervalos de tempo iguais, obteve-se, na calculadora, o diagrama de dispersão que se pode observar nas figuras 1 e 2 (o eixo das abcissas corresponde à variável x e o das ordenadas à variável y).

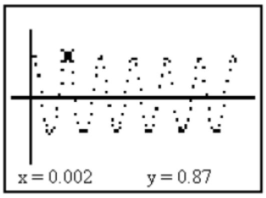


Figura 1

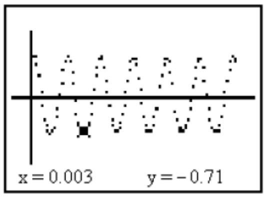


Figura 2

Em cada uma das figuras, está representada a posição do cursor no visor da calculadora. Na figura 1, o cursor encontra-se num ponto cuja ordenada é o máximo de y. Na figura 2, o cursor encontra-se num ponto cuja ordenada é o mínimo de y. Admita que o fenómeno é bem modelado por uma função definida por uma expressão do tipo $y = a + b\cos(cx)$, onde a, b, e c são constantes reais positivas.

a) Relativamente a qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado, justifique que:

a_1) O contradomínio é o intervalo $[a-b, a+b]$

a_2) $\frac{2\pi}{c}$ é período da função.

b) Determine os valores dos parâmetros a, b, e c, tendo em conta:

• os dados contidos nas figuras 1 e 2

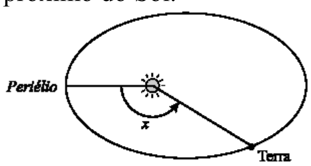
• a alínea a_1.

• a alínea a_2. e o facto de não existir nenhum período positivo inferior a $\frac{2\pi}{c}$

Apresente o valor de c arredondado às unidades.

(1ª fase 2006)

3. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0,2\pi[$) . Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância , em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por

$d = 149{,}6(1-0{,}0167\cos x)$

a) Determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\,\mathrm{sen}\,x$, em que

• t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;

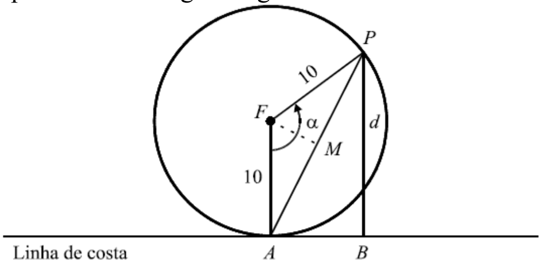
• T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

b$_1$) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b$_2$) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.
Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora.

(2ª fase 2006)

4. Um farol (ponto F), situado numa ilha, encontra-se a 10 km da costa. Nesta, sobre a perpendicular tirada do farol, está um observador (ponto A). A luz do farol descreve sucessivos círculos e tem um alcance de 10 km. Em cada instante, o farol ilumina segundo uma trajectória rectilínea, com extremidade num ponto P, que percorre a circunferência representada na figura seguinte.



Sejam:
• α a amplitude, em graus, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{F}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{F}P$
• M o ponto médio de [AP]
• $\overline{PB}$ a distância do ponto P à costa

Mostre que, para 0º<α<180º:

a) a distância, $\overline{AP}$, expressa em quilómetros, do observador ao ponto P é dada, em função de α, por $\overline{AP} = 20\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha}{2})$

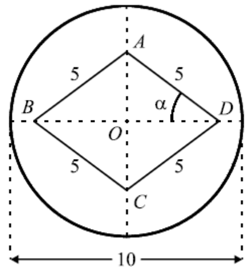
b) a distância, d, expressa em quilómetros, do ponto P à costa é dada, em função de α, por $d = 20\,\mathrm{sen}^2(\frac{\alpha}{2})$

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
• escreva $F\hat{A}P$, em função de α
• escreva $P\hat{A}B$, em função de α
• escreva $\overline{BP}$, em função de α

(1ª fase 2007)

5. Numa determinada localidade, o responsável pelo planeamento urbanístico apresentou uma proposta para a construção de uma rotunda com 10 metros de diâmetro. No centro da rotunda, pretende-se construir um jardim em forma de losango, com 20 metros de perímetro, como sugere a figura.

À volta do jardim, serão colocados calçada e outros elementos decorativos.



Relativamente à figura, considere que:
• os pontos A, B, C e D são os vértices do losango;
• o ponto O é o centro da circunferência;
• o ângulo ADO tem de amplitude α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

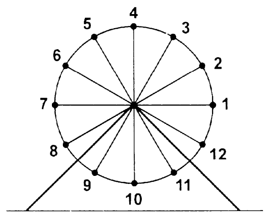
a) Mostre que a área, em m^2, da zona destinada ao jardim é dada, em função de α, por:

$A(\alpha) = 50\cos\alpha \cdot \mathrm{sen}\,\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) Determine $A(\frac{\pi}{4})$. Interprete geometricamente o resultado obtido, indicando qual a forma particular do losango, para $\alpha = \frac{\pi}{4}$

(2ª fase 2007)

6. A figura representa uma roda de um parque de diversões.



A Natércia ficou sentada na cadeira mais próxima do solo.
Admita que a distância h, em metros, da cadeira onde está sentada a Natércia ao solo, t minutos após a roda começar a girar, é dada por:

$h(t) = 20 - 19\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$

a) Determine a distância a que a cadeira onde a Natércia está sentada se encontra do solo no momento em que a roda começa a girar.

b) Quanto tempo demora a roda a dar uma volta completa?

c) Recorrendo à sua calculadora, determine quanto tempo, durante uma volta completa, a Natércia está a mais de 18 m de distância do solo. Dê uma resposta com aproximação às décimas de minuto.

Nota**:** Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo quatro casas decimais.

(Escola A.A.S. 2ª fase 2007)

7. Na figura 2 está representado um pêndulo simples, E, oscilando no plano DAB.

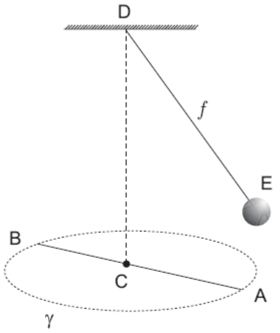


Fig. 2

Quando um pêndulo oscila à superfície da Terra, o plano de oscilação não se mantém fixo, vai rodando ao longo do tempo, em torno de um eixo vertical, representado na figura por CD, devido ao movimento de rotação da Terra. O tempo que decorre entre o início da oscilação do pêndulo e o momento em que o plano de oscilação do pêndulo completa uma rotação de 360º designa-se por *período*. Este período não é o mesmo em todos os lugares da Terra, pois depende da latitude do lugar em que se realiza a experiência. Vamos considerar apenas lugares do hemisfério norte. A relação entre o período, T, medido em horas, e a latitude do lugar, q, medida em graus, estabelecida por Jean Foucault (1819-1868), em 1851, é: $T = \dfrac{24}{sen(q)}$ (Lei do seno de Foucault)

a) Mostre que, no Pólo Norte, o pêndulo tem um período de 24 horas. Recorde que a latitude no Pólo Norte é de 90º.

b) A latitude de Paris, onde Foucault realizou a experiência que confirmou a referida lei, é, aproximadamente, de 49º. O João declarou ter feito uma experiência semelhante à de Foucault, nas mesmas condições, tendo obtido o valor de 48 horas para o período do pêndulo. Num pequeno texto e usando apenas a lei do seno de Foucault:

• indique o período que Foucault terá registado na sua experiência de 1851;

• indique a latitude do local em que o João terá feito a sua experiência;

• comente, fundamentadamente, a possibilidade de a experiência do João poder ter sido realizada em Portugal Continental, sabendo que Portugal Continental está compreendido entre, aproximadamente, as latitudes 36º e 42º.

(1ª fase 2008)

8. Numa pequena cidade foi colocado, em lugar de destaque, um painel publicitário alusivo às ofertas turísticas da região.

O painel tem um mecanismo que faz accionar um ponto luminoso (ponto P), que descreve uma circunferência de centro O, com cinco metros de raio, tal como a figura 3 sugere. Sejam:

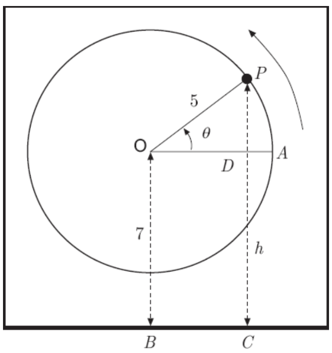


Fig. 3

• θ a amplitude, em graus, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$;

• $\overline{OB} = 7$

• *h* a distância do ponto luminoso à base do painel.

Comece por completar a tabela seguinte, relativa a várias posições do ponto P, ao longo de uma volta.

θ	0º	90º	180º	270º	360º
h					

De seguida, mostre que, para 0º < θ < 90º, a distância, *h*, expressa em metros, do ponto luminoso à base do painel, é dada, em função de θ, por $h(\theta) = 7 + 5sen\theta$

(2ª fase 2008)

9. Na figura 4, ilustra-se um método simples para determinar o raio da Terra. Este método consiste em medir o ângulo α, ângulo de depressão do horizonte, a partir de um ponto de altitude elevada, do qual se avista o mar. Relativamente a esta figura, que não está à escala, considere que:

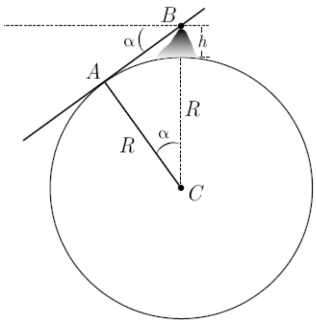


Fig. 4

• B representa o ponto de observação;

• C designa o centro da Terra;

• α é a amplitude, em graus, do ângulo de depressão do horizonte, (0º < α<90º);

• h é a altitude do lugar, em quilómetros;

• o triângulo [ABC] é rectângulo em A;

• R é o raio da Terra, em quilómetros;

• $\overline{BC} = R + h$

a) Mostre que $R = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

<u>Sugestão</u>: Comece por determinar cos α no triângulo [ABC] e, de seguida, resolva a equação obtida em ordem a R.

b) Eratóstenes (276-195 a.C.), por volta do ano 230 a.C., calculou, por um processo diferente e de grande simplicidade,
o raio da Terra. Admita que o valor calculado por Eratóstenes foi de 6316 km. O Rodrigo calculou o raio da Terra pelo método acima descrito. Utilizando um teodolito, obteve, a partir do cume da ilha do Pico,
α= 1,5564º. A altitude do Pico é 2,35 km. Determine a diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos. Apresente o resultado arredondado às unidades.

<u>Sugestão</u>: Comece por calcular o valor obtido pelo Rodrigo, usando a igualdade $R = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

(1ª fase 2009)

10. O Carlos costuma passar as suas férias de Verão no Algarve, na zona da Ria Formosa. Num determinado dia de Agosto, o Carlos acompanhou um amigo seu, o António, na apanha do marisco. Para isso, foram de manhã cedo para um local adequado da ria, aproveitando a baixa-mar.

Admita que, nesse dia, o nível das águas do mar, M, em metros, registado pelo marégrafo local, foi dado, aproximadamente, por:

$M(t) = 1,055sen(0,507t + 0,916) + 1,908$ com $0 \leq t \leq 24$

Nesta expressão:

• a variável t representa o tempo, em horas, contado a partir das zero horas, desse dia;

• o argumento da função seno é medido em radianos.

O António sabia que, naquele local da ria, era possível efectuar a apanha de marisco enquanto o nível das águas não excedesse 1,3m. Determine, recorrendo às capacidades da sua calculadora, o período de tempo da manhã em que foi possível efectuar a apanha do marisco. Apresente os extremos desse período de tempo, em horas e minutos, com os minutos aproximados às unidades. Apresente o(s) gráfico(s) em que se baseou para dar a resposta. Nos cálculos intermédios, utilize, pelo menos, quatro casas decimais.

(2ª fase 2009)

11. Admita que, num certo dia, a temperatura, em graus Celsius (ºC), num laboratório, é dada por

$f(t) = 20 + 4\cos[\frac{\pi(t+10)}{12}]$ com $t \in [0, 24]$

Nesta expressão:

• a variável t representa o tempo, em horas, contado a partir das zero horas desse dia;

• o argumento da função co-seno é medido em radianos.

a) Entre as 6 e as 10 horas da manhã, a temperatura no laboratório aumentou. De quanto foi esse aumento de temperatura?

b) Pretende-se desenvolver uma cultura de bactérias no mesmo laboratório. Para o efeito, devem ser respeitadas as seguintes condições,

I) a temperatura não pode ser superior a 22 ºC mais de 10 horas consecutivas; relativamente à temperatura no laboratório naquele dia.

II) a diferença entre os valores das temperaturas máxima e mínima não pode ultrapassar 9 ºC;

III) nas primeiras 5 horas do dia, a temperatura tem de ser sempre inferior a 19 ºC.

Elabore uma pequena composição na qual refira se cada uma das condições, I), II) e III), é ou não cumprida, explicitando, para cada caso, uma razão que fundamente a sua resposta.

(fase especial 2009)

12. O Diogo é estudante de um curso de Gestão Hoteleira. Para uma das disciplinas do curso, realizou dois trabalhos. O primeiro trabalho consistiu na elaboração de um programa turístico. O segundo trabalho incluiu a análise de vários indicadores sociológicos relativos a alguns países da União Europeia. O programa turístico elaborado pelo Diogo incluía uma visita a Lisboa e um passeio de barco no rio Tejo. A fim de aproveitar o tempo disponível para as diversas actividades, o Diogo teve em conta que a duração da exposição solar varia ao longo do ano. Com base em dados do Observatório Astronómico de Lisboa, obteve os modelos que dão, aproximadamente, a hora a que o Sol nasceu, N, e a hora a que o Sol se pôs, P, em Lisboa, em cada dia do ano de 2009:

$$N(x) = 6{,}5987 + 1{,}3424 \ \text{sen}(0{,}0161x + 1{,}8287)$$
$$P(x) = 18{,}6745 + 1{,}3875 \ \text{sen}(0{,}0164x - 1{,}1955)$$

Considere que:

• x representa a ordem do dia do ano, sendo $x \in \{1,2,...,365\}$

• o argumento da função seno está em radianos

• a duração da exposição solar é dada por $P(x) - N(x)$

a) Determine a duração da exposição solar no último dia do ano de 2009, em Lisboa, de acordo com os modelos apresentados. Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades. Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, três casas decimais.

b) Determine o número de dias do ano de 2009 nos quais, de acordo com os modelos apresentados, a duração da exposição solar, em Lisboa, foi superior a 10 horas. Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, uma casa decimal.

c) Qual foi, em 2009, a ordem do dia do ano com a maior duração de exposição solar, em Lisboa? Resolva o problema, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, quatro casas decimais.

(1ª fase 2010)

13. A CADTEL é uma cadeia de grandes hotéis e possui dois hotéis, numa certa região, distanciados alguns quilómetros um do outro: o VISTASERRA e o VISTAMAR. Estes dois hotéis da cadeia CADTEL estão equipados com painéis solares do mesmo tipo.

Na Figura 7, está representado um desses painéis, com superfície rectangular, apoiado numa plataforma horizontal e equipado com um elevador hidráulico. O movimento do elevador mantém a perpendicularidade dos raios solares em relação à superfície do painel, mas apenas durante a parte do dia em que a inclinação (θ) dos raios solares, em relação ao solo, varia entre 30º e 70º. A Figura 8 ilustra o funcionamento do painel, de forma esquemática, durante essa parte do dia.

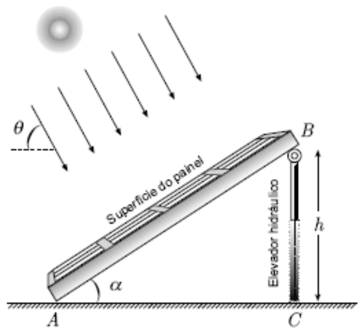


Figura 7

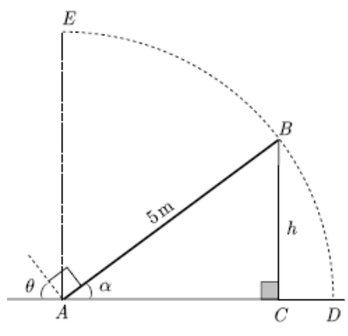


Figura 8

Admita que:

• $\overline{AB} = 5m$

• o ponto B desloca-se no quarto de circunferência ED, de centro em A

• o ponto C acompanha o movimento do ponto B, deslocando-se ao longo de [AD] , de modo que [BC] ⊥ [AC]

• h é a distância, em metros, do ponto B à plataforma

• θ é a amplitude, em graus, da inclinação dos raios solares, com 30º ≤θ ≤70º

• α é a amplitude, em graus, do ângulo BAC

a) Mostre que h = 5 cos θ
Sugestão: Poderá ser-lhe útil começar por mostrar que a amplitude do ângulo ABC é θ
b) Determine os valores de θ e de α, quando h = 2,5

(1ª fase 2010)

14. A Figura 4, que não está à escala, representa a face [ABO] de uma pirâmide. Nesta face, a parte representada pelo trapézio isósceles [IJQP] está pintada de branco e a parte restante está pintada de cinzento. Sabe-se que:

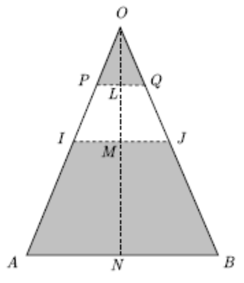


Figura 4

- $\overline{AO} = 3$ metros
- $\overline{AI} = \overline{IO} = 2 \times \overline{PO}$
- $A\hat{O}B = 40°$
- N, M e L são, respectivamente, os pontos médios de [AB], [IJ] e [PQ]

a) Mostre que 2,052 é o valor, em metros, arredondado com três casas decimais, de $\overline{AB}$. Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, quatro casas decimais.
b) Mostre que a área do trapézio [ABJI] é igual a doze vezes a área do triângulo [PQO]
Nota: Se efectuar cálculos, não proceda a arredondamentos.

(fase especial 2010)

15. Perto do coreto, existe um poste de electricidade. Colocou-se um fio eléctrico esticado, com lâmpadas aplicadas, unindo o topo desse poste, o topo do coreto e um ponto da base da cobertura do coreto. A Figura 6 representa, esquematicamente, a situação. Considere que:

- todos os pontos representados pertencem ao mesmo plano vertical;
- os pontos O e R representam, respectivamente, o vértice superior e o centro da base da cobertura do coreto;
- os pontos H e D representam vértices opostos da base octogonal da cobertura do coreto;
- os pontos W e T representam, respectivamente, a base e o topo do poste;
- os pontos S e U pertencem ao segmento $[WT]$
- o triângulo $[DTO]$, que não é um triângulo rectângulo, representa o fio eléctrico;
- θ designa a amplitude, em graus, do ângulo DTO
- ZW representa o plano horizontal do solo;
- $ZW \perp ZO$, $ZW \perp WT$, $RS \perp ST$ e $OU \perp UT$
- $\overline{WU} = 7$ metros
- $\overline{WT} = 12$ metros
- $\overline{RO} \approx 1{,}364$ metros
- $\overline{RD} \approx 2{,}672$ metros
- $\overline{DS} = 4$ metros

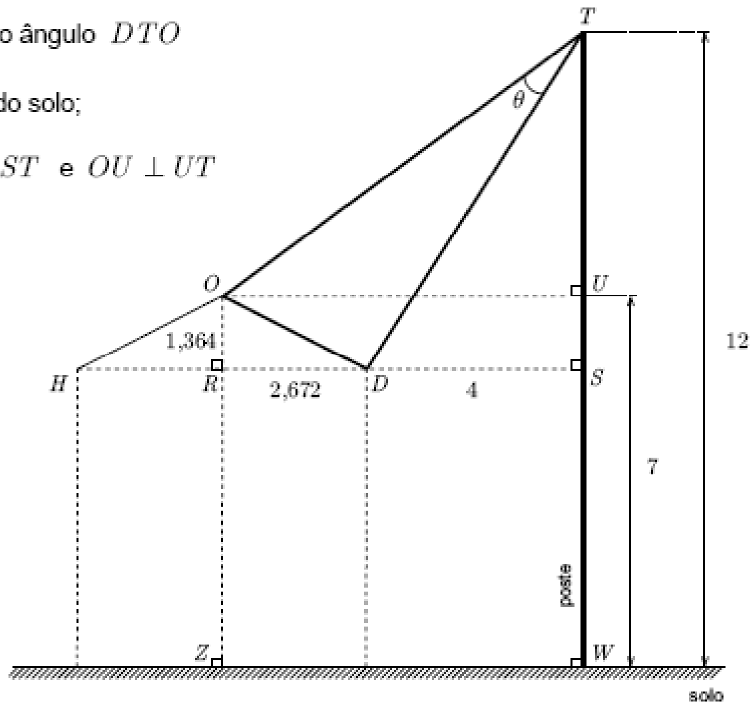


Figura 6

Determine o valor de θ
Apresente a resposta com o valor arredondado às unidades.
Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, três casas decimais.

(fase especial 2010)

16. O Rui é um estudante de Acústica que vive na zona do porto de Leixões e se interessa por assuntos relacionados com o mar. A Figura 2 apresenta parte da tabela publicada pelo Instituto Hidrográfico com as previsões das alturas de maré, no porto de Leixões, para os sete primeiros dias do mês de Julho de 2010. Os valores das alturas estão em metros e o tempo é indicado em horas e minutos de cada dia. Com base nos dados da tabela publicada pelo Instituto Hidrográfico, o Rui obteve, por regressão sinusoidal, a seguinte expressão, que relaciona a altura de maré, M, em metros, no porto de Leixões, com o tempo, t , em horas, contado a partir das zero horas do dia 1 de Julho de 2010:
$M(t) = 2 + 1{,}02\ \text{sen}(0{,}50t - 1{,}44)$ para $t \geq 0$. O argumento da função seno está em radianos.

	Hora		Altura
	h	min	m
1 QUI			
2 SEX	0	10	1,0
	6	21	2,8
	12	18	1,1
	18	36	3,0
3 SÁB	0	50	1,1
	7	3	2,7
	13	2	1,3
	19	19	2,8
4 DOM	1	35	1,2
	7	52	2,7
	13	54	1,4
	20	10	2,7
5 SEG	2	28	1,3
	8	50	2,6
	14	57	1,4
	21	10	2,7
6 TER	3	30	1,3
	9	55	2,6
	16	8	1,4
	22	18	2,7
7 QUA	4	36	1,3
	11	0	2,7
	17	17	1,3
	23	25	2,7

Figura 2

a) Descreva, com base na expressão obtida pelo Rui, a previsão da variação da altura de maré durante o primeiro dia de Julho de 2010, indicando os instantes entre os quais a maré subiria e os instantes entre os quais a maré desceria. Apresente os valores em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.
Em cálculos intermédios, utilize valores arredondados às centésimas.

b) Determine a diferença entre a altura de maré prevista pelo Instituto Hidrográfico para as 18 horas e 36 minutos do dia 2 de Julho de 2010 e a altura de maré, para o mesmo instante, dada pela expressão obtida pelo Rui. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve pelo menos três casas decimais.

(1ª fase 2011)

17. Durante séculos, os moinhos de vento serviram para moer o trigo e obter a farinha com que se fabricava o pão. A Figura 1 apresenta a fotografia de um moinho de vento, de tipo mediterrânico. O moinho é posto a funcionar pela acção do vento, que faz rodar as suas velas, fixadas e esticadas num conjunto de 8 varas. Admita que as varas têm todas o mesmo comprimento e que se unem no mesmo ponto.

Figura 1

As Figuras 2 e 3 representam, esquematicamente, duas posições distintas das velas de um mesmo moinho. O esquema representado em cada uma das figuras tem a forma de um octógono regular, e os pontos O e V assinalam as extremidades de uma das varas.

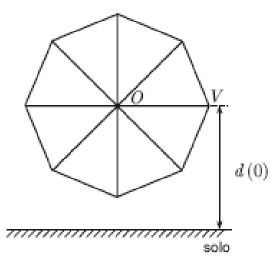


Figura 2

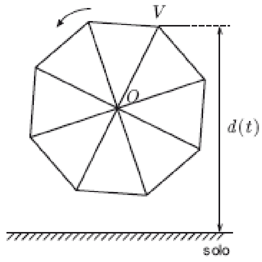


Figura 3

Admita que:

• num certo dia, as velas rodaram, no sentido indicado na Figura 3, durante um quarto de hora, com velocidade constante;

• no instante inicial, a vara representada por [OV] estava posicionada paralelamente ao solo, como sugere a Figura 2;

• a distância, d, em metros, do ponto V ao solo, t segundos após as velas terem começado a rodar, é dada, durante o intervalo de tempo em que as velas rodaram, por

$d(t) = 6,5 + 6\cos(\frac{\pi t}{9} - \frac{\pi}{2})$ para $t \in [0,900]$. O argumento da função co-seno está em radianos.

a) Determine o comprimento de uma vara.

Sugestão – Na sua resposta, poderá começar por apresentar o gráfico da função d num intervalo adequado, por exemplo [0, 60], e assinalar os pontos relevantes para a resolução do problema.

b) No instante em que se iniciou o movimento, o ponto V encontrava-se a uma determinada distância do solo. Calcule quantas vezes, incluindo a desse instante, esteve o ponto V a essa distância do solo, durante os quinze minutos em que as velas estiveram a rodar.

c) Na Figura 4 estão representados o octógono regular [ABCDEFGH], com centro no ponto O, os segmentos de recta [FB] e [DH] e as rectas EA e GC

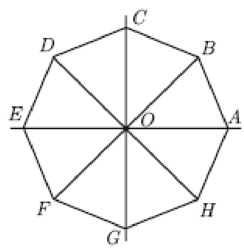


Figura 4

c_1) Uma rotação é uma transformação geométrica que é caracterizada pelo seu centro e por uma amplitude do ângulo da rotação. Caracterize uma rotação que transforme o ponto B no ponto G

c_2) Considere o referencial ortogonal e monométrico, com origem no ponto O, no qual os pontos A e C pertencem, respectivamente, aos semieixos positivos das abcissas e das ordenadas, tendo o ponto A coordenadas ($\sqrt{2}$, 0). Determine as coordenadas do ponto simétrico de B relativamente ao eixo das ordenadas.

(2ª fase 2011)

18. Uma empresa fabrica caleiras para escoamento de águas pluviais, utilizando chapas metálicas de largura fixa e de espessura desprezável. As chapas são assentes numa plataforma horizontal e são dobradas longitudinalmente, de modo que as faces laterais das caleiras sejam geometricamente iguais e formem um ângulo de amplitude θ com a horizontal, como se ilustra na Figura 1.

A partir de um corte transversal numa caleira deste tipo, pode obter-se um trapézio isósceles, como o trapézio [ABCD], apresentado no esquema da Figura 2.

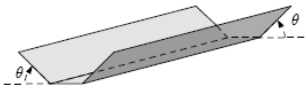


Figura 1

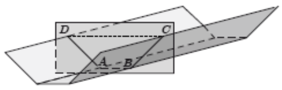


Figura 2

A altura da caleira é igual à altura do trapézio e depende da amplitude θ do ângulo de dobragem. Relativamente ao trapézio [ABCD], representado na Figura 3, sabe-se que:

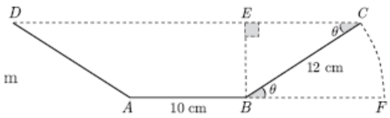


Figura 3

- $\overline{AB} = 10$ cm
- $\overline{BC} = 12$ cm
- F é o ponto da semi-recta $\dot{A}B$ tal que $\overline{BF} = 12$ cm
- $F\hat{B}C = \theta$, com 0º<θ<90º
- $\overline{BE}$ é a altura, em cm, do trapézio;
- $F\hat{B}C = E\hat{C}B$

a) Determine θ, em graus, de modo que o trapézio [ABCD] tenha 6cm de altura.

b) Mostre que a área, R, em cm^2, do trapézio [ABCD] é dada, em função de θ, por $R(\theta) = 120sen(\theta) + 144sen(\theta)\cos(\theta)$. O argumento das funções seno e co-seno está em graus.

Sugestão – Na sua resposta, poderá começar por mostrar que $\overline{EC} = 12\cos(\theta)$ que $\overline{BE} = 12sen(\theta)$

c) A capacidade de escoamento da caleira será máxima quando o trapézio [ABCD] tiver a maior área possível. Determine θ, em graus, de modo que a capacidade de escoamento da caleira seja máxima. Apresente o resultado arredondado às unidades. Note que a área, R, em cm^2, do trapézio [ABCD] é dada, em função de θ, por $R(\theta) = 120sen(\theta) + 144sen(\theta)\cos(\theta)$, com o argumento das funções seno e co-seno em graus.

(fase especial 2011)

Soluções: 1. 0h51’40’’ 2. 0,08; 0,79; 3142 3. 152,1 e 147,1; 147,7 5. 25 m^2 6. 1 m; 10’; 5,3 ‘
7. 31,8 h; 30°; não 8. 7; 12; 7; 2; 7 9. 51 10. 5h36min e 9h22min 11. 4 I, II e III 12. 9h22min; 300; 174
13. 60° e 30° 15. 21° 16. 6h1min e 12h18min e 18h35min; 0,1 17. 6m; 101; O225°; (–1,1) 18. 30°; 58°

O professor: RobertOliveira