Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática B – 11.º ano

MOVIMENTOS NÃO LINEARES
TAXA DE VARIAÇÃO E FUNÇÕES RACIONAIS.
Exercícios saídos em exames e testes intermédios

1. Considere a função f, de domínio R\{1}, definida por $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$

a) Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto dos números reais *x* tais que f(x)≤–1. Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

b) O gráfico da função f tem duas assimptotas. Escreva as suas equações.

(Teste intermédio Mat. A 2006)

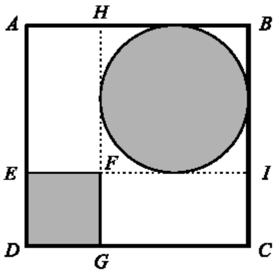
2. A Anabela espremeu várias laranjas e obteve três litros de sumo de laranja, para um lanche que vai oferecer aos amigos. Para que a quantidade de bebida seja suficiente, a Anabela vai juntar água aos três litros de sumo de laranja obtidos. Admita que o sumo de laranja puro, ou seja, acabado de espremer, já contém 92% de água.

a) Designando por *x* a quantidade (em litros) de água que vai ser acrescentada aos três litros de sumo de laranja puro, justifique que a percentagem de água existente na bebida que a Anabela vai oferecer aos amigos é dada por $\frac{100x+276}{x+3}$

b) Qual é a quantidade máxima de água que a Anabela pode acrescentar aos três litros de sumo de laranja puro, de tal modo que a sua bebida não tenha mais de 97% de água? Apresente o resultado em litros.

(Teste intermédio 2006)

3. Na figura está o primeiro esboço de um logotipo que o João está a construir para o Clube de Matemática da sua escola. Dentro do quadrado [ABCD] estão representados, a sombreado, um círculo e um quadrado [DEFG], nos quais vão ser colocados desenhos alusivos a jogos matemáticos. Na região branca, ou seja, não sombreada, vão ser colocados símbolos matemáticos e texto.



Sabe-se que:• $\overline{AB} = 1$;• o círculo está inscrito no quadrado [FHBI]. Designando por *x* o lado do quadrado [DEFG], determine o valor de *x* para o qual a área da região branca é máxima. Apresente o valor pedido, arredondado às centésimas.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

• exprima, em função de x,

- a área do quadrado sombreado,

- o raio do círculo sombreado,

- a área do círculo sombreado,

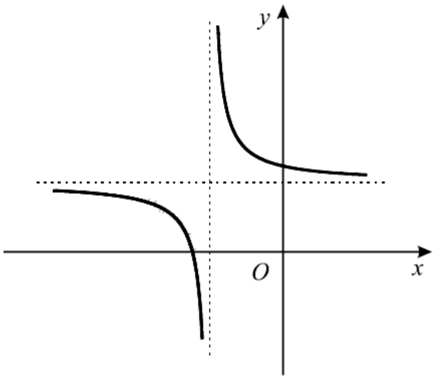
- a área da região sombreada,

- a área da região branca;

• recorrendo à sua calculadora, determine o valor pedido.

(Teste intermédio 2006)

4. Para um certo valor de *a* e para um certo valor de *b*, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função *f* cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \wedge b > 0$ **(B)** $a > 0 \wedge b < 0$

(C) $a < 0 \wedge b > 0$ **(D)** $a < 0 \wedge b < 0$

(Teste intermédio Mat. A 2007)

5. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2+1}{2-x} < 0$

(A)]–1,2[(B)]1,2[(C)]–∞,2[(D)]2,+∞[

(Teste intermédio Mat. A 2007)

6. A Maria vai sempre de carro, com o pai, para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito horas da manhã. Admita que, quando a Maria sai de casa *t* minutos depois das sete e meia, a duração da viagem, em minutos, é dada por $d(t) = 45 - \frac{5600}{t^2+300}$ ($t \in [0,30]$)

As aulas da Maria começam sempre às oito e meia.

a) Mostre que, se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, chega à escola às 8 h 11 m, mas, se sair de casa às 7 h 55 m, já chega atrasada às aulas.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva o seguinte problema: *Até que horas pode a Maria sair de casa, de modo a não chegar atrasada às aulas?*

A sua resolução deve incluir:

• uma explicação de que, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \le 60$

• o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora
• a resposta ao problema em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

(2.º Teste intermédio Mat. A 2008)

7. Considere a função *f*, de domínio R\{−2}, definida por

$f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$

a) Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Na figura 3 estão representados, em referencial o.n. *xOy*:
• parte do gráfico da função *f*
• as rectas *r* e *s*, assimptotas do gráfico de *f*
• o quadrilátero [*ABCD*]

A e *B* são os pontos de intersecção do gráfico da função *f* com os eixos coordenados. *C* é o ponto de intersecção das rectas *r* e *s*. *D* é o ponto de intersecção da recta *r* com o eixo *Oy*. Determine a área do quadrilátero [*ABCD*]

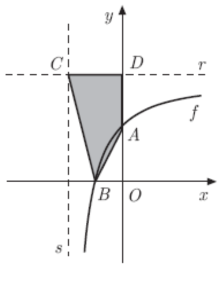


Figura 3

(2.º Teste intermédio Mat. A 2009)

8. Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio electrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às oito horas e sair ao meio-dia. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois do meio-dia. Sempre que um trabalhador chega *t* minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia, que ele tem de permanecer na empresa é dado por

$$c(t) = \frac{t^2+25t}{t^2+1} \quad (t \geq 0)$$

a) Na segunda-feira, o Manuel entrou na empresa às nove horas e um quarto. A que horas deveria ter saído, de modo a cumprir o estipulado no contrato? Apresente a sua resposta em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

b) Ontem, o Manuel saiu da empresa às 12 horas e 25 minutos. Com quantos minutos de atraso é que ele chegou à empresa?

c) Ao sair ontem da empresa, o Manuel pensou: «Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar quase meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.» Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 40% desse tempo (por exemplo, um atraso de 10 minutos deve ser compensado com 14 minutos de trabalho depois do meio-dia). Numa pequena composição, compare a proposta do Manuel com o contrato em vigor, contemplando os seguintes tópicos:
• justifique que, de acordo com a proposta do Manuel, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa *t* minutos, é dado por $p(t) = 1,4t$;
• refira se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor;
• considerando que, para um certo atraso, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, refira:
– o atraso;
– o tempo de permanência, depois do meio-dia, que esse atraso determina.

Utilize a calculadora para comparar os gráficos das duas funções (*c* e *p*); transcreva para a sua folha de prova esses gráficos e assinale o ponto relevante que lhe permite responder a algumas das questões colocadas, bem como as suas coordenadas, arredondadas às unidades.

(2.º Teste intermédio Mat. A 2009)

9. Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B. Admita que, *t* anos após o início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A é dado aproximadamente por $a(t) = \frac{11t+6}{t+1} (t \geq 0)$

e que o número de animais, em milhares, da espécie B é dado aproximadamente por $b(t) = \frac{t+9}{t+3} (t \geq 0)$

a) Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A. Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

b) Na figura 5, estão representadas graficamente as funções *a* e *b*. Tal como estes gráficos sugerem, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor. Determine esse valor, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções *a* e *b* cujas equações deve apresentar.

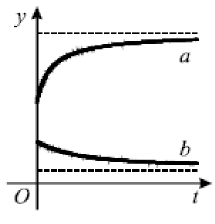


Figura 5

(2.º Teste intermédio Mat. A 2010)

10. Um laboratório está a ensaiar duas formulações, a formulação A e a formulação B, de um mesmo medicamento, o ZITEX. Admita que:
• na formulação A, a concentração de ZITEX, em miligramas por litro de sangue, *t* horas após ter sido administrado a um paciente, é dada por $a(t) = \frac{12t+1}{(t+1)^2} - 1$ com $t \in [0,10]$
• na formulação B, para a mesma quantidade de medicamento, a concentração de ZITEX, em miligramas por litro de sangue, *t* horas após ter sido administrado a um paciente, é dada por $b(t) = \frac{36t+1,5}{(2t+1)^2} - 1,5$ com $t \in [0,10]$
• em ambas as formulações, a concentração mínima necessária, para que o ZITEX produza efeito, é 1,5 miligramas por litro (mg/l) de sangue.

a) É aconselhável que um medicamento com as características do ZITEX comece a produzir efeito, no máximo, 15 minutos após ter sido administrado a um paciente e que esse efeito se mantenha durante, pelo menos, 2 horas. Averigúe se cada uma das formulações, A e B, do ZITEX satisfaz as condições referidas. Fundamente a sua resposta, com base nas representações gráficas das funções a e b. Apresente o tempo de duração do efeito do ZITEX, em horas, arredondado às décimas, em cada uma das formulações. Utilize valores arredondados às décimas para as abcissas dos pontos que considerar relevantes.

b) O ZITEX, na formulação A, foi administrado a um paciente às 8 horas da manhã de um certo dia.

b_1) Determine a que horas desse dia, já depois de o medicamento ter deixado de produzir efeito, é que o valor da concentração de ZITEX, em miligramas por litro de sangue, foi igual a 50% do valor da concentração máxima. Apresente a sua resposta em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades. Em cálculos intermédios, utilize sempre valores arredondados com quatro casas decimais.

b_2) Verifica-se que o valor da taxa de variação da função a , no instante t = 1,25 , é aproximadamente igual a – 0,44 mg/l/h. Interprete, na situação descrita, a afirmação anterior, explicitando:

• o instante do dia, em horas e minutos, a que corresponde o valor $t = 1,25$;
• o significado do sinal do valor da taxa de variação;
• as unidades de medida da taxa de variação.

(Teste intermédio 2010)

Soluções: 1.]1,4/3]; y=2 e x=1 2. 5 3. π/(π+4) 4. B 5. D 6. 7h52min
7.]–∞,–2[∪]2,+∞[; 5 8. 13h39’; 5 9. 3000; 10000 10. A; 11h28’; 9h15’

O professor: RobertOliveira