

GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO – Exercícios (Matemática A – 11.º ano)

2.ª Parte: Produto Escalar de 2 vectores. Rectas e planos no espaço.

Exercícios saídos nas provas globais da ESAAS e nos Exames Nacionais

1. Considere os pontos A(2,-5) e B(7,7) e o vector $\vec{u} = (2,-1)$. Determine:

a) A norma do vector \vec{AB} .

b) Uma equação da recta que passa por A e é perpendicular à recta s de equação $x+3y-5=0$.

(Prova Global ESAAS 1995 - 2ª chamada)

2. Considere, num referencial o.n. $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, o vector $\vec{u}(2,5,0)$.

a) Indique, justificando, 2 vectores que sejam perpendiculares a \vec{u} mas que não sejam colineares.

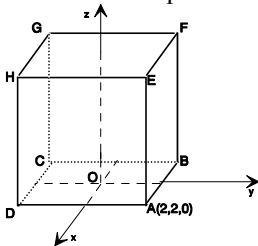
b) Qual o ângulo de \vec{u} com \vec{e}_1 ? (Aproximação a menos de 0,01 radianos.)

c) Escreva uma equação cartesiana do plano α perpendicular a \vec{u} e que intersecta o eixo Oy no ponto (0,1,0).

d) Considere os planos $\beta: x+y+z=1$ e $\gamma: 3y-2z=1$. Indique, justificando, qual a posição relativa dos planos α, β e γ . (Nota: Caso não tenha resolvido c) considere $\alpha: 2x+5y+1=0$)

(Exame Nacional 1996-1ª chamada)

3. Num referencial o.n. Ox y z está representado um cubo de faces paralelas aos planos coordenados.



O perímetro de cada face é, na unidade considerada, igual a 16.

a) Escreva uma equação cartesiana do plano DGF.

b) Defina analiticamente a superfície esférica tangente a todas as faces do cubo.

c) Determine k, caso exista, de modo que o vector

$\vec{u}(k^2+2k, k^2-1, 3)$ seja colinear com \vec{CH} .

d) Sendo M e N os pontos médios das arestas [AB] e [EF], respectivamente, determine as coordenadas do ponto $P \in [HE]$ sabendo que a secção plana determinada no cubo pelo plano MNP é quadrado.

(Exame Nacional 1996-2ª chamada)

4. Considerando os pontos P(0,1) e Q(2,7), responda às seguintes questões:

a) Determine o valor de k de modo que (3,k) seja perpendicular ao vector PQ.

b) Escreva uma equação:

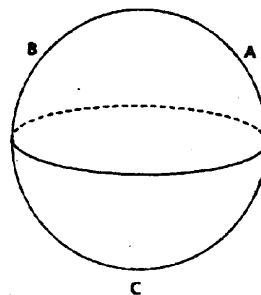
b₁) Vectorial da recta que passa por P e é perpendicular à recta PQ;

b₂) Reduzida da recta que passa pelo ponto (0,3)

e tem inclinação $\frac{\pi}{3}$.

(Prova Global ESAAS 1997 - 1ª chamada)

5. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=25$.



A superfície esférica está representada na figura junta. Os pontos A, B e C são pontos dessa superfície. O ponto A tem coordenadas (0,4,3). O ponto B tem coordenadas (0,-4,3). O ponto C é um ponto de cota negativa do eixo Oz.

a) Mostre que uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto A é $4y+3z=25$. (Note que um plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio no ponto de tangência)

b) Justifique que C tem coordenadas (0,0,-5) e determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano referido na alínea anterior com a recta BC.

c) Calcule \hat{ACB} .

(Prova Modelo 1997)

6. Num referencial o.n. Oxyz, os planos α e β são definidos pelas equações $\alpha: x-y+z+1/2=0$ e $\beta: 2x+2y+2z+1=0$. Os planos α e β são

(A) Coincidentes

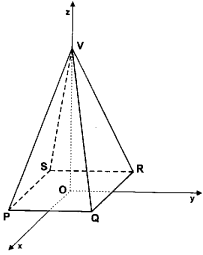
(B) Estritamente paralelos

(C) Concorrentes não perpendiculares

(D) Perpendiculares

(Exame Nacional 1997-1ª chamada)

7. Considere, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide regular de base quadrada (ver figura ao lado). O vértice V da pirâmide pertence ao semi-eixo positivo Oz. A base da pirâmide está contida no plano xOy. A aresta [PQ] é paralela ao eixo Oy. O ponto Q tem coordenadas (2,2,0).



a) Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 32, mostre que o vértice V tem coordenadas (0,0,6).

b) Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y+z=6$.

c) Determine uma condição que defina a recta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano QRV.

d) Justifique que a intersecção da aresta [QV] com o plano de equação $z=3$ é o ponto $M(1,1,3)$. Determine a área da secção produzida na pirâmide.

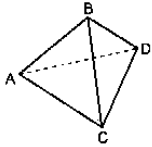
(Exame Nacional 1997-2ª chamada)

8. Considere a recta r de equação $y=-3x+2$. Quais das seguintes equações representa a recta que contém o ponto (0,-4) e é perpendicular à recta r dada?

- (A) $y=-3x+4$ (B) $y=1/3 x+4$
 (C) $y=1/3 x-4$ (D) $y=-1/3 x-4$

(Prova Global ESAAS 1998)

9. Na figura está representado um tetraedro regular (sólido geométrico com 4 faces, que são todos triângulos equiláteros); A, B, C e D são os vértices do tetraedro;



$\overline{AB}=6$. O valor do produto escalar

$\vec{BC} \cdot \vec{BD}$ é

- (A) 18 (B) $18\sqrt{2}$ (C) 36 (D) $36\sqrt{2}$

(Exame Nacional 98-1ª chamada)

10. Considere num referencial o.n. Oxyz: o plano α de equação $2x+2y+2z=5$; a recta r, definida pela equação $x=y=z$. Qual é a posição relativa da recta r e do plano α ?

(A) r é perpendicular a α (B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares

(C) r é estritamente paralela a α (D) r está contida em α

(Exame Nacional 1998-2ª chamada)

11. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o plano definido pela equação $x+2y+3z=10$. Para um certo n.º real m, a condição $x=y-2=z/m$ define uma recta paralela ao referido plano. Indique o valor de m

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

(Exame Nacional 1999-1ª chamada)

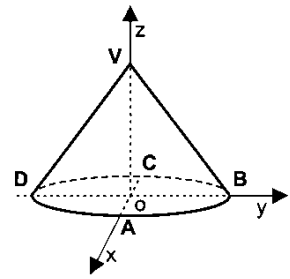
12. Na figura está representado, em referencial o.n. Oxyz, um cone de revolução. Sabe-se que: a base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial; [AC] e [BC] são diâmetros da base; o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox; o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy; o ponto V pertence ao semieixo positivo Oz.

a) Sabendo que uma equação do plano ABV é $4x+4y+3z=12$, mostre que o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4.

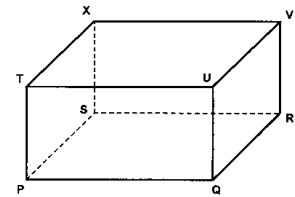
b) Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone.

c) Designando por α a amplitude do ângulo BVD, determine o valor de $\text{sen} \alpha$.

(Exame Nacional 1999-1ª chamada)



13. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo [PQRSTUVX].

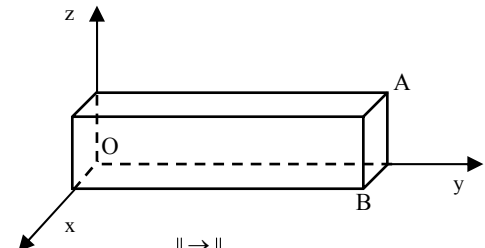


Qual das questões seguintes é verdadeira?

- (A) $\vec{TP} \cdot \vec{QU} = 0$ (B) $\vec{UQ} \cdot \vec{TX} = 0$
 (C) $\vec{PQ} \cdot \vec{TU} = 0$ (D) $\vec{PQ} \cdot \vec{PV} = 0$

(Exame Nacional 1999-2ª chamada)

14. Considere, num referencial Oxyz, um paralelepípedo como o da figura ao lado. Considere ainda o ponto $A(0,6,2)$.



a) Sabendo que $\|\vec{OB}\| = \sqrt{40}$, justifique que o ponto B tem de coordenadas (2,6,0).

b) Escreva uma equação vectorial da recta AB.

c) Determine uma equação do plano que contém o ponto B e é perpendicular ao vector $\vec{u}(-1,0,3)$.

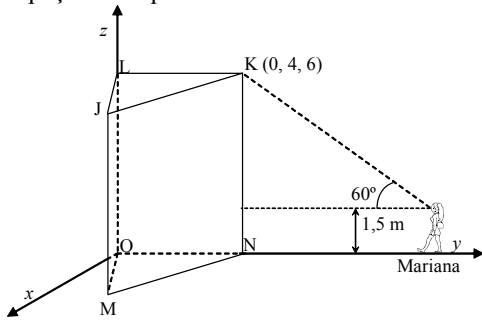
(Prova Global ESAAS 1999)

15. Num referencial o.n. Oxyz, qual a posição relativa entre a recta definida pela equação $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-6}$ e o plano definido por $x - y + 3z = -7$?

- (A) São estritamente paralelos;
 (B) São perpendiculares;
 (C) A recta está contida no plano;
 (D) A recta é concorrente mas não perpendicular ao plano.

(Prova Global ESAAS 1999-2ª chamada)

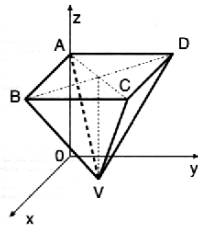
16. A figura representa um monumento com a forma de um prisma triangular regular (a base é um triângulo equilátero) colocado num referencial ortonormado do espaço e em que a unidade vale 1 metro.



- Justifique que M tem coordenadas $(\sqrt{12}, 2, 0)$.
- Determine, em graus e a menos de $0,1^\circ$, a medida do ângulo que \vec{OM} faz com \vec{OK} .
- Mostre que $\sqrt{3}x + 3y + 2z - 12 = 0$ é uma equação cartesiana do plano LMN.
- Verifique se o plano LMN (ver alínea anterior) é perpendicular à recta OK.
- A Mariana, quando colocada sobre o eixo OY, observa o topo do monumento segundo um ângulo de 60° . Calcule, a menos de 1 cm, a que distância do monumento está a Mariana.

(Prova Global ESAAS 2000-2ª chamada)

17. Considere a figura ao lado e os seguintes dados:

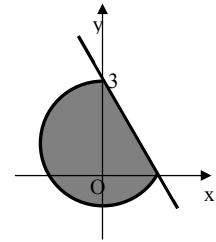


V é o vértice da pirâmide quadrangular regular; [ABCD] é um quadrado; Os pontos A e B têm coordenadas $(0,0,6)$ e $(6,0,6)$ respectivamente.

- Mostre que $\vec{VC} = (3, 3, 6)$ e escreva as equações cartesianas da recta que passa em A e é paralela a VC.
- Sabendo que $\vec{VB} = (3, -3, 6)$, prove que $(-2, 0, 1)$ é um vector normal ao plano VBC.
- Escreva uma equação cartesiana do plano VBC.

(Prova Global ESAAS 2002-1ª chamada)

18. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. xOy, uma parte de um círculo e uma recta. O círculo tem centro no ponto $(0;1)$ e raio igual a 2; A recta tem uma inclinação igual a $\frac{2}{3}\pi$ radianos; O ponto $(0;3)$ pertence ao círculo e à recta.



- Indique a expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados de $\frac{2}{3}\pi$.
- Justifique que a recta da figura está definida pela equação $y = -\sqrt{3}x + 3$.
- Indique uma condição que defina a área a sombreado da figura, incluindo a fronteira.

(Prova Global ESAAS 2002-2ª chamada)

Exercícios saídos no teste intermédio e nos exames de Mat B (2005/2006)

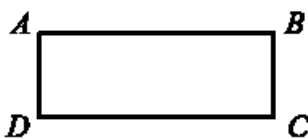
19. Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 160 hectares. Pretende semear pelo menos 50 hectares de trigo e pelo menos 30 hectares de milho. Sabe-se que: • o custo de produção de um hectare de trigo é 1500 euros; • o custo de produção de um hectare de milho é 1000 euros; e que: • cada hectare de trigo dá um lucro de 600 euros; • cada hectare de milho dá um lucro de 500 euros.

Sabendo ainda que o agricultor não pode investir mais do que 200000 euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear

de modo que tenha um lucro máximo?

(Teste intermédio 2006)

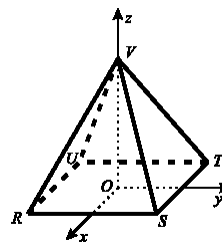
20. Na figura está representado um rectângulo [ABCD].



Mostre que $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ é igual a \vec{AB}^2

(Teste intermédio 2006)

21. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide regular. Sabe-se que:

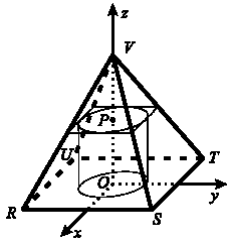


- a base [RSTU] é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
- a aresta [RS] é paralela ao eixo Oy;
- o vértice V tem coordenadas $(0,0,2)$.

a) Mostre que a recta definida pela condição $x=0 \wedge y=2z$ é perpendicular ao plano STV e escreva uma equação deste plano.

b) Considere agora um ponto P que se desloca ao longo do segmento [OV], nunca coincidindo com o ponto O, nem com o ponto V.

Para cada posição do ponto P considere o cilindro tal que:



• a base inferior do cilindro tem centro na origem do referencial e está contida no plano xOy ; • a base superior do cilindro tem centro no ponto P e está inscrita no quadrado que é a secção produzida na pirâmide pelo plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto P . Seja z a cota do ponto P e seja f a função que dá o volume do cilindro, em função de z .

b₁) Justifique que o domínio da função f é o intervalo $]0,2[$ e que $f(z) = \pi \left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z \right)$

b₂) Considere o seguinte problema: *Entre que valores deve variar a cota do ponto P de tal modo que o volume do cilindro seja superior à quinta parte do volume da pirâmide?*

Traduza o problema por meio de uma inequação e, utilizando a sua calculadora, resolva-a graficamente.

Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas. Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

(Teste intermédio 2006)

22. A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no Dia dos Namorados. Idealizaram arranjos formados por margaridas, rosas e violetas. Dispõem de: 192 margaridas, 88 rosas e 112 violetas. Pensaram formar dois tipos de arranjos: A e B. Cada arranjo do tipo A:

- será composto por 16 margaridas, 4 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 3 euros.

Cada arranjo do tipo B:

- será composto por 8 margaridas, 8 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 2 euros.

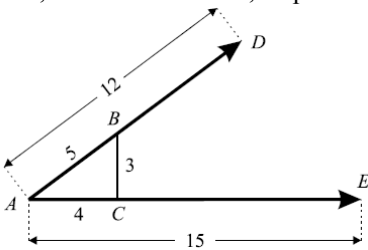
a) A Isabel sugeriu que se fizessem 7 arranjos de cada tipo. O Dinis sugeriu que se fizessem 10 arranjos do tipo A e 5 do tipo B. Averigüe se cada uma destas propostas é, ou não, viável, tendo em conta as flores disponíveis.

b) Determine o número de arranjos de cada tipo que os alunos devem produzir, para obterem o maior lucro possível (admitindo que vendem todos os arranjos).

(Exame Matemática B 1ª fase-2006)

Exercícios saídos no teste intermédio e nos exames de Mat B (2006/2007)

23. Na figura estão representados dois vectores, \vec{AD} e \vec{AE} , de normas 12 e 15, respectivamente.



No segmento de recta $[AD]$ está assinalado um ponto B . No segmento de recta $[AE]$ está assinalado um ponto C . O

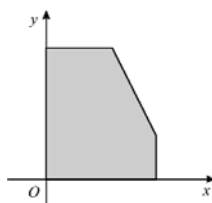
triângulo $[ABC]$ é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Indique o valor do produto escalar $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$

- (A) 108 (B) 128 (C) 134 (D) 144

(Teste intermédio 2007)

24. Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ 2x + y \leq 12 \end{cases}$$



Qual é o valor máximo que a função objectivo, definida por $z=x+y$, pode alcançar nesta região?

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13

(Teste intermédio 2007)

25. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P(0,4,3)$. Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à recta de equação vectorial $(x,y,z)=(0,1,-3)+k(1,0,2)$, $k \in \mathbb{R}$

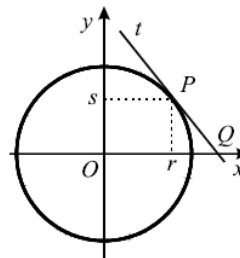
Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2 \leq 3$.

Sugere-se que:

- Determine uma equação do plano α .
- Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α .
- Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.

(Teste intermédio 2007)

26. Considere um ponto P , do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro no origem e raio 1.



Sejam (r,s) as coordenadas do ponto P . Seja t a recta tangente à circunferência no ponto P . Seja Q o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox . Prove que a abcissa do ponto Q é $\frac{1}{r}$.

(Teste intermédio 2007)

27. Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia eléctrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: energia de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de fuel, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período nocturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a 40 Mwh. Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida. Relativamente à energia de origem convencional, tem-se: • o preço por cada Mwh é de 80 euros. Relativamente à energia eólica, tem-se: • o preço por cada Mwh é de 90 euros; • o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os 40 Mwh. Represente por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consumidas pela autarquia.

Determine que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível (referente ao sistema das restrições);
- indique os valores de x e y para os quais é mínima a função objectivo.

(Exame Matemática B 1ª fase-2007)

Exercícios saídos nos testes intermédios e nos exames de Mat B (2007/2008)

28. Num referencial o. n. $Oxyz$, sejam α e β os planos definidos pelas equações: $\alpha: x + y - z = 1$ e

$\beta: 2x + 2y - 2z = 1$. A intersecção dos planos α e β é

- (A) o conjunto vazio (B) um ponto
(C) uma recta (D) um plano

(1.º Teste intermédio 2008)

29. Considere o seguinte problema: *Uma frutaria confecciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.*

Bebida X : com um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Bebida Y : com dois litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Para confeccionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 4 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 5 euros. Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confeccionar por dia, para maximizar o lucro? Sendo x o número de litros de bebida X e sendo y o número de litros de bebida Y, qual das opções seguintes traduz correctamente este problema?

(A) Maximizar $4x + 5y$ sujeito a

(B) Maximizar $12x + 10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} \leq 12 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} \leq 5 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 4 \end{cases}$$

(C) Maximizar $4x + 5y$ sujeito a

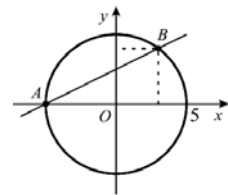
(D) Maximizar $12x + 10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

(1.º Teste intermédio 2008)

30. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy , uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O ponto A também pertence ao eixo das abcissas. Admitindo que o declive da recta AB é igual $\frac{1}{2}$, resolva as três alíneas seguintes:



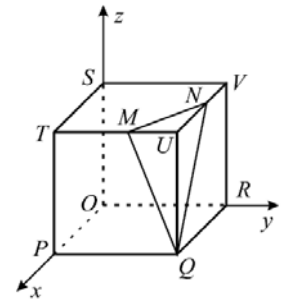
a). Mostre que uma equação da recta AB é $x - 2y + 5 = 0$

b) Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3,4)$

c) Seja C o ponto de coordenadas $(-3,16)$. Verifique que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B .

(1.º Teste intermédio 2008)

31. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUW]$ de aresta 5. O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial. Os vértices P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz , respectivamente. O triângulo escaleno $[MNQ]$ é a secção produzida no cubo pelo plano α de equação $10x + 15y + 6z = 125$



a) Escreva uma condição que defina a recta que passa por U e é perpendicular ao plano α

b) Seja β a amplitude, em graus, do ângulo MQN . Determine β . Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Sugestão: comece por determinar as coordenadas dos pontos M e N

(1.º Teste intermédio 2008)

32. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r ?

- (A) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$
- (B) $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k(1, 2, 3), k \in \mathbb{R}$
- (C) $x = 2 \wedge y = 1$
- (D) $x = 2 \wedge z = 1$

(2.º Teste intermédio 2008)

33. Numa determinada região do interior, as chuvas torrenciais causaram inundações, e a região foi considerada zona de catástrofe. Os prejuízos acentuaram-se muito nas actividades agrícolas. Para enfrentar esta situação, os organismos ligados aos serviços agropecuários decidiram adquirir rações para animais. Foram pedidos, com urgência, dois tipos de ração: FarX e FarY. A FARJO é uma fábrica especializada na produção destes tipos de ração. Estas rações contêm três aditivos: vitaminas, sabores e conservantes. Por cada tonelada de ração do tipo FarX, são necessários dois quilogramas de vitaminas, um quilograma de sabores e um quilograma de conservantes.

Por cada tonelada de ração do tipo FarY, são necessários um quilograma de vitaminas, dois quilogramas de sabores e três quilogramas de conservantes. A FARJO dispõe, diariamente, de 16 quilogramas de vitaminas, 11 quilogramas de sabores e 15

quilogramas de conservantes. Estas são as únicas restrições na produção destas rações. Represente por x a quantidade de ração FarX produzida diariamente, expressa em toneladas, e por y a quantidade de ração FarY produzida diariamente, expressa em toneladas.

a) É possível a FARJO fabricar, num só dia, 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY? Justifique.

b) Quais são as quantidades de ração de cada tipo que devem ser produzidas, de modo que a quantidade total de ração produzida diariamente seja máxima?

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- indique os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

(Exame Matemática B 2ª fase-2008)

Exercícios saídos nos testes intermédios e nos exames de Mat B (2008/2009)

34. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

A intersecção desta superfície com o plano xOy é

- (A) o conjunto vazio (B) um ponto
- (C) uma circunferência (D) um círculo

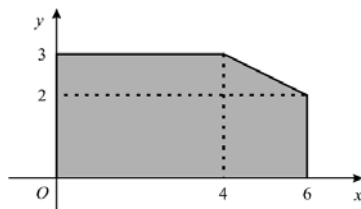
(1.º Teste intermédio 2009)

35. Considere, num referencial o. n. xOy , a recta r de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$. Seja s a recta perpendicular a r que passa no ponto de coordenadas $(1, 4)$. Qual é a equação reduzida da recta s ?

- (A) $y = 2x + 2$ (B) $y = -2x + 6$
- (C) $y = -2x + \frac{5}{3}$ (D) $y = 2x + \frac{3}{5}$

(1.º Teste intermédio 2009)

36. Num certo problema de Programação Linear, pretende-se maximizar a função objectivo, a qual é definida por $L = 3x + y$. Na figura está representada a região admissível.



Qual é a solução desse problema?

- (A) $x = 6$ e $y = 3$ (B) $x = 4$ e $y = 2$
- (C) $x = 4$ e $y = 3$ (B) $x = 6$ e $y = 2$

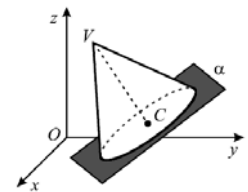
(1.º Teste intermédio 2009)

37. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cone de revolução. Sabe-se que:

• a base do cone está contida no plano α de equação $x + 2y - 2z = 11$

• o vértice V do cone tem coordenadas $(1, 2, 6)$

• o ponto C é o centro da base do cone



a) Determine uma equação do plano γ que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano α

b) Seja β o plano definido pela equação $2x - y + z = 3$. Averigúe se os planos α e β são perpendiculares.

c) Seja W o ponto simétrico do ponto V , em relação ao plano xOy . Indique as coordenadas do ponto W e escreva uma condição que defina o segmento de recta $[VW]$.

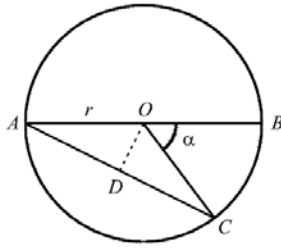
d) Sabendo que o raio da base do cone é igual a 3, determine o volume do cone.

Sugestão: comece por escrever uma condição que defina a recta que contém o vértice do cone e que é perpendicular ao plano α e utilize-a para determinar as coordenadas do ponto C .

(1.º Teste intermédio 2009)

38. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio r . Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência
- O ponto C pertence à circunferência
- α é a amplitude do ângulo COB
- $[OD]$ é perpendicular a $[AC]$



Prove que $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Sugestão

Percorra as seguintes etapas:

- Justifique que o triângulo $[OAC]$ é isósceles
- Justifique que $\overline{AC} = 2\overline{AD}$
- Justifique que a amplitude do ângulo CAB é $\frac{\alpha}{2}$
- Escreva \overline{AD} , em função de $\frac{\alpha}{2}$ e de r
- Conclua que $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(1.º Teste intermédio 2009)

39. Seja $[AB]$ o diâmetro de uma esfera de centro C e raio

5. Qual é o valor do produto escalar $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$?

- (A) -25 (B) $-5\sqrt{2}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 25

(2.º Teste intermédio 2009)

40. A BRUGÁS é uma empresa que processa uma variedade de gás usada na confecção de um produto para aquecimento. Este produto é classificado em dois tipos: PPremium e PRegular. Em cada semana, a BRUGÁS recebe 24m^3 de gás e dispõe de 45 horas para os processar. Por motivos técnicos, as variedades de gás não podem ser processadas em simultâneo. A produção de cada tonelada de PPremium:

- requer 3 m^3 de gás;
 - demora 5 horas;
 - gera um lucro de 1600 euros.
- A produção de cada tonelada de PRegular :
- requer 2 m^3 de gás;
 - demora 5 horas;
 - gera um lucro de 1200 euros.

Devido a problemas relacionados com o armazenamento, a empresa só pode produzir até 5 toneladas de PRegular. Represente por x o número de toneladas de PPremium produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS. Represente por y o número de toneladas de PRegular produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS. Quantas toneladas de PPremium e de PRegular devem ser produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS, para que o lucro semanal seja máximo? Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique a função objectivo;
- indique as restrições do problema;
- represente, graficamente, a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- calcule os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

(Exame Matemática B 2ª fase-2009)

Exercícios saídos nos testes intermédios e nos exames de Mat B (2009/2010)

41. Considere, num referencial o.n. xOy , as rectas r e s , definidas, respectivamente, por:

$$r : (x, y) = (1, 3) + k(2, 0), k \in \mathbb{R} \quad s : y = \frac{4}{5}x + 1$$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo destas duas rectas (valor arredondado às unidades)?

- (A) 37° (B) 39° (C) 41° (D) 43°

(1.º Teste intermédio 2010)

42. Considere, num referencial o.n. xOy , a recta r e o plano α , definidos, respectivamente, por:

$$r : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z \quad \alpha : y - 2z = 0$$

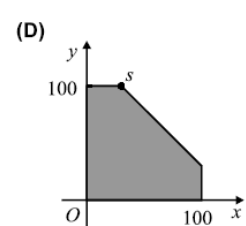
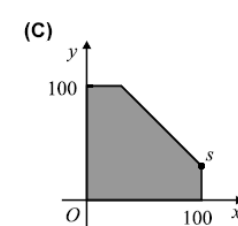
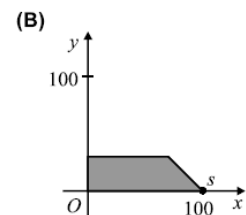
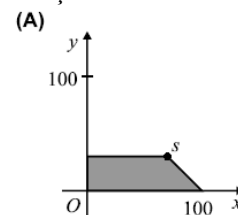
Qual é a intersecção da recta r com o plano α ?

- (A) É o ponto $(3,2,0)$ (B) É o ponto $(0,0,0)$
(C) É a recta r (D) É o conjunto vazio.

(1.º Teste intermédio 2010)

43. Considere o seguinte problema de Programação Linear: *Um agricultor tem um terreno com 100 hectares, onde pretende semear centeio e tomate. Devido a problemas de regadio, não pode semear mais do que 30 hectares de tomate. Cada hectare de centeio dá um lucro de 800 euros e cada hectare de tomate dá um lucro de 1000 euros.*

Quantos hectares de centeio e quantos hectares de tomate deve o agricultor semear, de modo a obter o maior lucro possível? Seja x o número de hectares de centeio e seja y o número de hectares de tomate. Em qual das figuras seguintes está representada a região admissível deste problema e nela assinalado o vértice S correspondente à solução?



(1.º Teste intermédio 2010)

44. Na figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência de equação

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

O ponto C é o centro da circunferência.

a) O ponto A , de coordenadas $(0, -3)$, pertence à circunferência. A recta t é tangente à circunferência no ponto A . Determine a equação reduzida da recta t

b) R e S são dois pontos da circunferência. A área da região sombreada é $\frac{25\pi}{6}$. Determine o valor do produto escalar $\overline{CR} \cdot \overline{CS}$

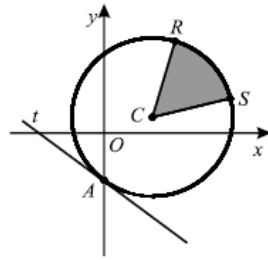


Figura 2

(1.º Teste intermédio 2010)

45. Na figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ cuja base está contida no plano xOy . Sabe-se que:

- o ponto D pertence ao eixo Oy
- o ponto A tem coordenadas $(3, 2, 0)$
- o ponto V pertence ao plano de equação $z = 6$

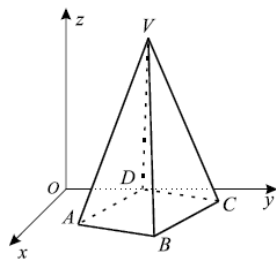


Figura 3

- $6x + 18y - 5z = 54$ é uma equação do plano DAV
- $18x - 6y - 5z = -18$ é uma equação do plano DCV

- Determine o volume da pirâmide.
- Determine as coordenadas do ponto V , sem recorrer à calculadora.
- Seja S o ponto de coordenadas $(-15, 8, 5)$. Seja r a recta que contém o ponto S e é perpendicular ao plano DCV . Averigüe se a recta r contém o ponto A

(1.º Teste intermédio 2010)

46. Seja $[AB]$ um diâmetro de uma esfera de centro C e raio 4. Qual é o valor do produto escalar $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$?

- (A) 16 (B) -16 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $-4\sqrt{2}$

(2.º Teste intermédio 2010)

47. Na figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy , parte de um plano ABC . Cada um dos pontos A , B e C pertence a um eixo coordenado. O plano ABC é definido pela equação

$$6x + 3y + 4z = 12$$

Seja r a recta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC . Determine uma equação vectorial da recta r

(2.º Teste intermédio 2010)

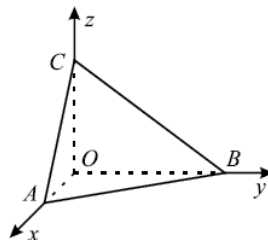


Figura 4

48. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E , de equação $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, o ponto P , de coordenadas $(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 2 + \cos\alpha)$, pertence à superfície esférica E . Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto P .

(2.º Teste intermédio 2010)

49. A CADTEL é uma cadeia de grandes hotéis e possui dois hotéis, numa certa região, distanciados alguns quilómetros um do outro: o VISTASERRA e o VISTAMAR. Estes dois grandes hotéis diferem no modo de funcionamento e na especificidade dos serviços que prestam aos seus clientes. A disponibilidade de quartos é a seguinte:

- VISTASERRA: 500 quartos;
- VISTAMAR: 600 quartos.

Cada hotel tem a sua equipa fixa de trabalhadores. Além destes, a CADTEL dispõe de uma bolsa comum de recursos humanos, formada por trabalhadores que desempenham funções em qualquer dos dois hotéis, de acordo com as necessidades de serviço de cada hotel. Admita que, por cada dezena de quartos ocupados, por noite, em cada hotel, é necessário recrutar, na bolsa comum, os seguintes trabalhadores:

	Recepcionistas	Empregados de bar	Funcionários do serviço de quartos
VISTASERRA	2	1	4
VISTAMAR	1	2	3

Entretanto, uma epidemia fez adoecer alguns trabalhadores da bolsa comum da CADTEL e, nestas circunstâncias, a disponibilidade de recursos humanos desta bolsa é a seguinte:

- 100 recepcionistas;
- 120 empregados de bar;
- 210 funcionários do serviço de quartos.

Designe por x o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA, e por y o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR. Qual deverá ser, nas condições referidas, face aos recursos humanos disponíveis, o número de quartos ocupados, por noite, no VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no VISTAMAR, de modo a que seja máximo o número total de quartos ocupados, por noite, no conjunto dos dois hotéis? Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objectivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- determinar o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR correspondentes à solução do problema.

(Exame Matemática B 2ª fase-2010)

Exercícios saídos nos testes intermédios e nos exames de Mat B (2010/2011)

50. Num certo problema de programação linear pretende-se minimizar a função objectivo, a qual é definida por $L = 2x + y$. Na Figura 1, está representada a região admissível. Numa das opções seguintes está a solução desse problema. Em qual delas?
 (A) $x = 1$ e $y = 1$
 (B) $x = 0$ e $y = 2$
 (C) $x = 3$ e $y = 1$
 (D) $x = 0$ e $y = 1$

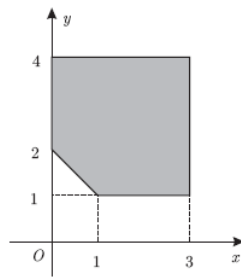


Figura 1

(1.º Teste intermédio 2011)

51. De um triângulo isósceles [ABC] sabe-se que:
 • os lados iguais são [AB] e [AC], tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
 • cada um dos dois ângulos iguais tem 30º de amplitude.
 Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?
 (A) $-32\sqrt{3}$ (B) -32 (C) 64 (D) $64\sqrt{3}$

(1.º Teste intermédio 2011)

52. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência de centro em O e raio 5. Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy , respectivamente.

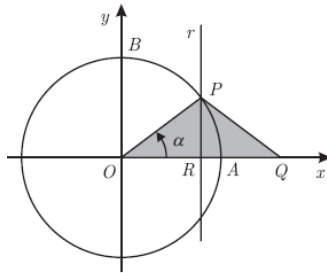


Figura 3

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B. Para cada posição do ponto P, sabe-se que:
 • o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
 • a recta r é a mediatriz do segmento [OQ]
 • o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
 • α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Seja f a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por

$$f(x) = 25 \sin x \cos x$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- a) Mostre que a área do triângulo [OPQ] é dada por $f(\alpha)$
- b) Determine o valor de α , pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, para o qual se tem $f(\alpha) = 25 \cos^2 \alpha$
- c) Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que $f(\theta) = 5$. Determine o valor de $(\sin \theta + \cos \theta)^2$

d) Considere agora o caso em que a abcissa do ponto P é 3. Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P

(1.º Teste Intermédio 2011)

53. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro [VNOPQRST], que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:
 • a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
 • o ponto P pertence ao eixo Ox

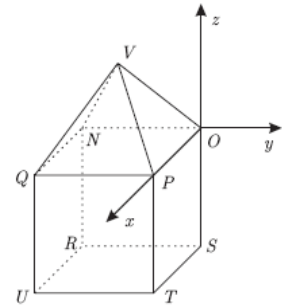


Figura 4

- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$
 - o plano QTV é definido pela equação $5x + 2y + 2z = 12$
 - a) Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva uma condição cartesiana que o defina.
 - a₁) Plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial.
 - a₂) Plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V
 - a₃) Recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto U
 - a₄) Superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T
 - b) Considere um ponto A, com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto U. Sabe-se que $\overline{OA} \cdot \overline{OT} = 8$. Determine a cota do ponto A
 - c) Determine o volume do poliedro [VNOPQRST]
- (1.º Teste Intermédio 2011)

54. Na Figura 5, está representado o quadrado [ABCD]. Sabe-se que:
 • o ponto I é o ponto médio do lado [DC]
 • o ponto J é o ponto médio do lado [BC]
 Prove que

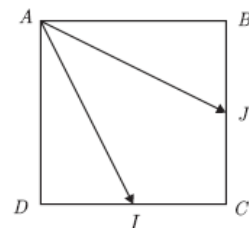


Figura 5

$$\overline{AI} \cdot \overline{AJ} = \|\overline{AB}\|^2$$

Sugestão: comece por exprimir cada um dos vectores \overline{AI} e \overline{AJ} como soma de dois vectores.

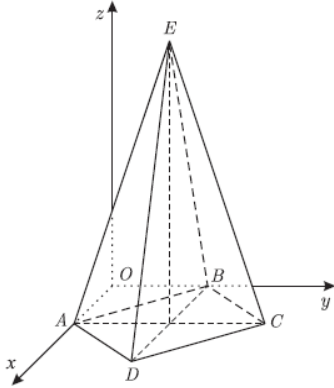
(1.º Teste Intermédio 2011)

55. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(1, 0, 0)$, $k \in \mathbb{R}$. Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r ?

- (A) $y=5 \wedge z=6$ (B) $x=3 \wedge y=4$
(C) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(3, 4, 5), k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(2.º Teste Intermédio 2011)

56. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDE] cuja base está contida no plano xOy.



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas (1,0,0)
- o vértice B tem coordenadas (0,1,0)
- o plano DCE é perpendicular à recta definida pela condição $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = z$. Determine o volume da pirâmide.

Nota – Pode ser-lhe útil determinar uma equação do plano DCE

(2.º Teste Intermédio 2011)

57. A Jalur é uma empresa que produz, artesanalmente, janelas de estilo antigo para o mercado de uma certa região. O gestor da Jalur sabe que a empresa consegue vender, nesse mercado, todas as janelas que produzir.

As janelas de estilo antigo produzidas pela Jalur são de dois tipos: Tipo I e Tipo II.

Sabe-se que:

- para produzir uma janela do Tipo I, são necessárias uma hora na secção de corte, três horas na secção de polimento e duas horas na secção de acabamentos;
- para produzir uma janela do Tipo II, são necessárias uma hora na secção de corte, duas horas na secção de polimento e uma hora na secção de acabamentos;
- as secções de produção da Jalur têm, semanalmente, a seguinte disponibilidade:
 - secção de corte: 16 horas;
 - secção de polimento: 36 horas;
 - secção de acabamentos: 22 horas.

O lucro que a Jalur obtém ao vender uma janela do Tipo I é 30 euros, e o que obtém ao vender uma janela do Tipo II é 25 euros.

Designe por x o número de janelas do Tipo I produzidas, semanalmente, pela Jalur, e designe por y o número de janelas do Tipo II produzidas, semanalmente, pela Jalur.

a) É possível a Jalur produzir um total de 15 janelas de estilo antigo, numa semana?

Justifique a sua resposta.

b) Determine quantas janelas do Tipo I e quantas janelas do Tipo II deve a Jalur produzir, semanalmente, para, nas condições referidas, obter o lucro máximo.

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objectivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- calcular o número de janelas do Tipo I e o número de janelas do Tipo II que a Jalur deve produzir, semanalmente, correspondentes à solução do problema.

(Exame Matemática B 1ª fase-2011)

Soluções: 1. 13; $3x-y-11=0$ 2. $(-5,2,0)$ e $(-5,2,1)$ por ex; 1,19; $2x+5y-5=0$; sec 2 a 2. 3. $x+z-2=0$; $x^2+y^2+(z-2)^2=4$; 1; $(2,2-2\sqrt{3},4)$.
4. -1; $(x,y)=(0,1)+k(3,-1)$, $k \in \mathbb{R}$; $y=\sqrt{3}x+3$ 5. 20; $(0,-20,35)$; $4/3$ 6. C 7. $(x,y,z)=k(0,3,1)$; 4 8. C 9. A 10. A
11. B 12. $x^2+y^2+(z-4)^2 \leq 25$; $24/25$ 13. B 14. $(x,y,z)=(0,6,2)+k(2,0,-2)$, $k \in \mathbb{R}$; $-x+3z+2=0$ 15. B 16. $73,9^\circ$; não; 260cm
17. $x/3=y/3=(z-6)/6$; $2x-z-6=0$ 18. $2\pi/3+2\pi k$; $x^2+(y-1)^2 \leq 4 \wedge y \leq -\sqrt{3}x+3$
19. 80 e 80 21. $2y+z=2$; 0,213 e 1,268 22. não; 10 e 4 23. D 24. B 25. 3π 27. 20 e 20
28. A 29. A 31. $(x-5)/10=(y-5)/15=(z-5)/6$; 37° 32. C 33. Sim; 7 e 2 34. B 35. A 36. D
37. $x+2y-2z+7=0$; não; $x=1 \wedge y=2 \wedge -6 \leq z \leq 6$; 18π 39. A 40. 6 e 3 41. B 42. C 43. A 44. $y=-3/4 x-3$; $25/2$
45. 20; $(2,4,6)$; sim 46. B 47. $(x,y,z)=(2,0,0)+k(6,3,4)$, $k \in \mathbb{R}$ 48. $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2, 5/2)$ 49. 120 e 540
50. B 51. B 52. $\pi/4$; $7/5$; $-3/4 x+25/4$ 53. $5x+2y+2z=0$; $x=2$; $(x-4)/5=(y+4)/2=(z+4)/2$; $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=16$; 2; 80
55. A 56. 2 57. Sim; 4 e 12

O professor: RobertOliveira