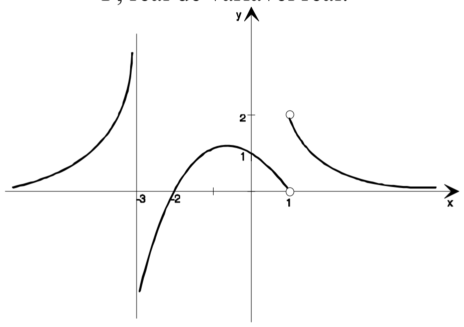
Escola Secundária de Francisco Franco

11º. Ano A: CÁLCULO DIFERENCIAL I

Alguns exercícios saídos em provas globais e em exames nacionais

(escolhidos de http://roliveira.pt.to)

5. Considere a representação gráfica de uma função F, real de variável real:



a) Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $D_F = \mathbb{R} \setminus \{-3 , 1\} \quad \wedge \quad CD_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(B) O gráfico tem apenas uma assímptota: $x = -3$.

(C) $x = -3$ e $y = 0$ são assímptotas verticais.

(D) $D_F = \mathbb{R} \setminus \{-3 , 1\} \quad \wedge \quad CD_F = \mathbb{R}$.

b) Quanto ao sinal de F, podemos afirmar que:

(A) $F(x) > 0$ sse $x \in]0 , +\infty[$.

(B) $F(x) \geq 0$ sse $x \in [-2 , +\infty[$.

(C) $F(x) < 0$ sse $x \in]-3 , -2[$.

(D) $F(x) \leq 0$ sse $x \in]-\infty , -2]$.

(Prova Global 97)

6. As funções g , h e j estão definidas em R por:

$$g(x) = 3x^3 - 15x^2 - 3x + 15 ,$$

$$h(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{e} \quad j(x) = \frac{g(x)}{h(x)} .$$

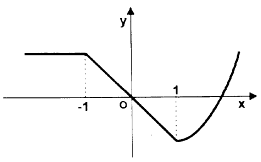
a) Mostre que 1 é solução da equação $g(x) = h(x)$.

b) Verifique que $j(x) = \dfrac{3x^2 - 12x - 15}{x + 2}$ e determine o domínio de j.

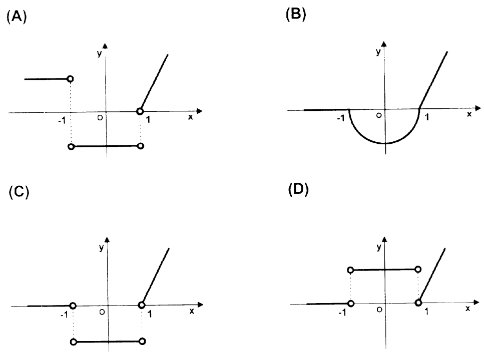
c) Resolva, em R, a seguinte condição: $j(x) \geq 0$.

(Prova Global 97)

12. Se a representação gráfica de uma função g é



então a representação gráfica de g´pode ser



(Exame 97-2ª chamada)

16. Considere a função racional $q(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

a) Calcule q(-3).

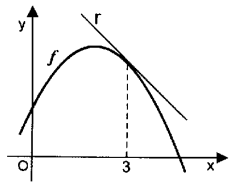
b) Determine o domínio de q(x).

c) Calcule os zeros de q(x).

d) Resolva, em R, a inequação $q(x) \leq 0$.

(Prova Global 98-2ª chamada)

18. Na figura estão representadas: parte do gráfico de uma função diferenciável em R; uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3.



O valor de f ’(3), derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a

(A) -1 (B) 0 (C) 1/f(3) (D) 1

(Exame Nacional 98, 1ª chamada)

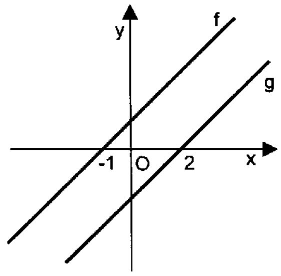
21. Considere a função g definida por $g(x)= \frac{2x-5}{x-1}$.

Indique qual é o valor de $\lim_{x \to 1^+} g(x)$

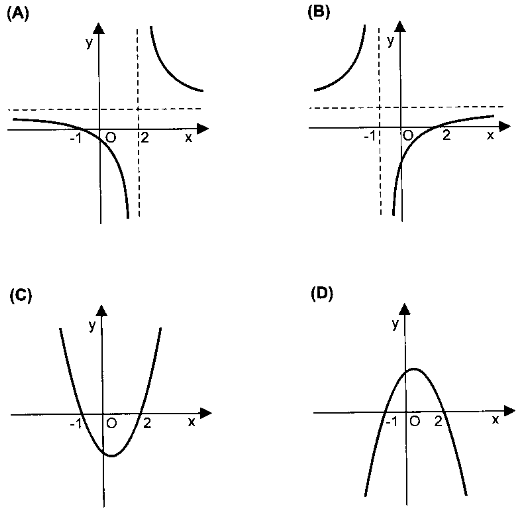
(A) 0 (B) 2 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

(Exame Nacional 98, 2ª chamada)

24. Na figura estão representadas graficamente duas funções: f e g

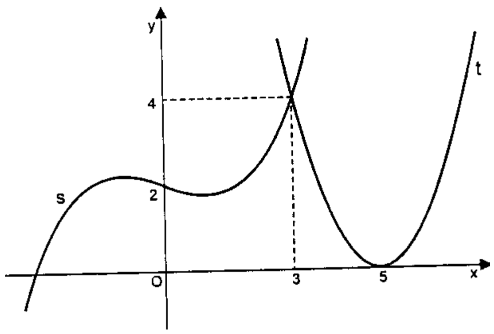


Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da função f/g?



(Exame Nacional 98, 2ª fase)

25. Na figura estão representadas graficamente as funções s e t.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função t não tem zeros
(B) 2 é um zero da função s
(C) 5 é um zero da função s/t
(D) 3 é um zero da função s-t

(Prova Modelo 99)

26. A função T, real de variável real, tem algumas características que podem ser descritas pelas seguintes tabelas:

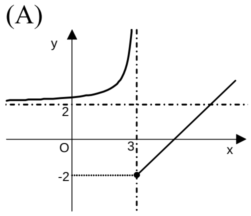
x	2,9	2,99	2,9999
T(x)	12	102	10002

x	3,1	3,001	3,00001
T(x)	–1,9	–1,999	–1,99999

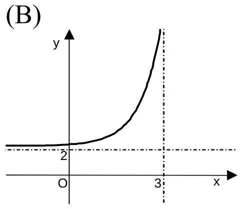
x	–50	–100	–10000
T(x)	2,02	2,01	2,0001

Qual, dos gráficos seguintes, o que melhor representa o da função T?

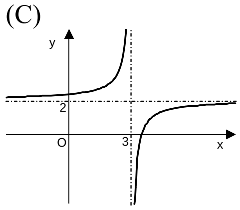
(A)



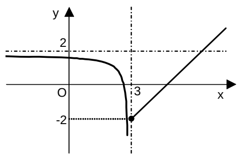
(B)



(C)

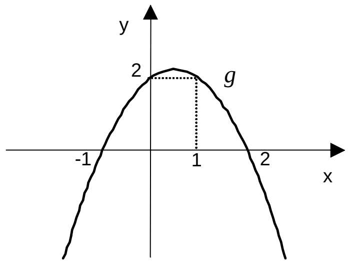


(D)



(Prova Global 99)

27. As funções reais f e g estão definidas, respectivamente, por $f(x)=\frac{1}{x}$ e pelo gráfico ao lado.



Das seguintes afirmações, qual é a falsa?

(A) $(f+g)(-1)=-1$ **(B)** $(f\times g)(1)=2$

(C) $\left(\frac{g}{f}\right)(-1)=-1$ **(D)** $(f\circ g)(0)=0{,}5$

(Prova Global 99)

28. Um balão meteorológico foi lançado a partir da torre do Centro de Meteorologia de uma cidade marroquina. Suponhamos que a sua altitude **A** (em metros) evoluiu com o tempo **t** (em horas desde o tempo do lançamento) de acordo com a função: $\mathbf{A(t)}=-100\mathbf{t}^2+1000\mathbf{t}+525$.

a) A que altitude foi largado o balão?

b) Com que velocidade começou o balão a subir?

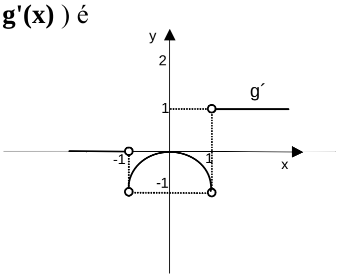
c) Qual foi a altitude máxima alcançada pelo balão?

d) O balão acabou por cair no mar. Quando aconteceu isso?

e) A que velocidade descia o balão quando tocou na água?

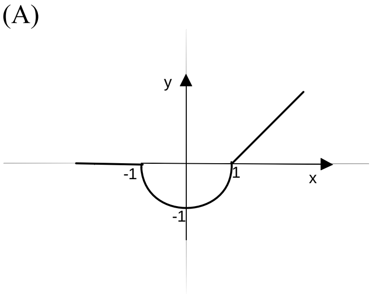
(Prova Global 99)

29. Se a representação gráfica da <u>função derivada</u> (**g'(x)**) é

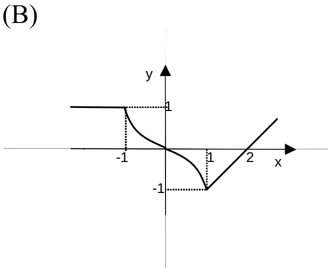


então a representação gráfica da **função g** pode ser:

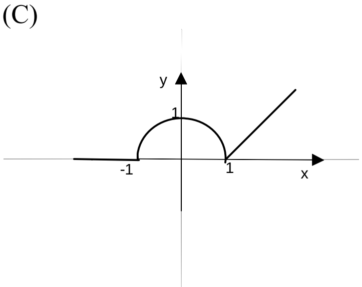
(A)



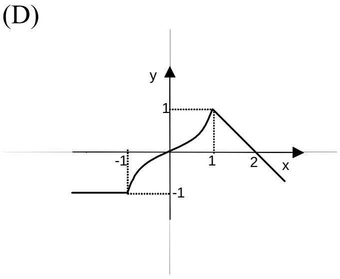
(B)



(C)

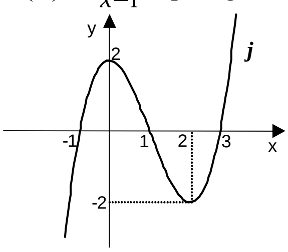


(D)



(Prova Global 99-2ª chamada)

30. As funções h e j estão definidas, respectivamente, por $h(x) = \frac{1}{x-1}$ e pelo gráfico ao lado.



Das seguintes afirmações, qual é a **falsa**?

(A) $(h+j)(-1) = -0{,}5$ **(B)** $(h \times j)(2) = -2$

(C) $\left(\frac{h}{j}\right)(0) = -0{,}5$ **(D)** $(h \circ j)(2) = 0$

(Prova Global 99-2ª chamada)

31. O preço (em contos) de um certo automóvel de luxo, $\boldsymbol{t}$ anos depois de ter sido comprado, varia de acordo com a seguinte função: $P(\boldsymbol{t}) = \frac{7000\boldsymbol{t}+125000}{\boldsymbol{t}+5}$ sendo $\boldsymbol{t} \geq 0$.

a) Qual o preço do automóvel 3 anos após a compra?

b) Mostre que $P(\boldsymbol{t}) = 7000 + \frac{90000}{\boldsymbol{t}+5}$.

c) Após quantos anos o preço é menor que 13000 contos?

d) O que acontece ao preço do automóvel à medida que o tempo passa?

e) Calcule e interprete $P'(5)$.

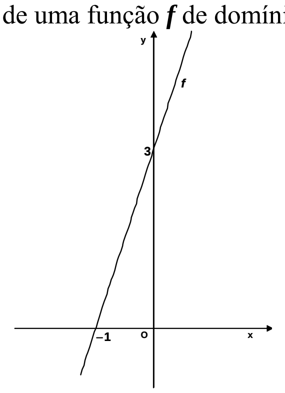
(Prova Global 99-2ª chamada)

32. Se a função de expressão f(x) tem dois zeros, então a função f(x+1) tem:

(A) Nenhum zero **(B)** Um zero
(C) Dois zeros **(D)** Três zeros

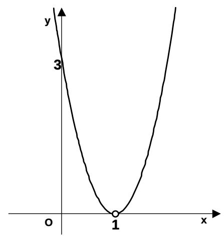
(Prova Global 2000)

33. Na figura abaixo está parte da representação gráfica de uma função $\boldsymbol{f}$ de domínio R.

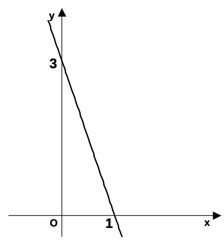


Indique qual dos gráficos seguintes poderá ser o gráfico de $1/\boldsymbol{f}$.

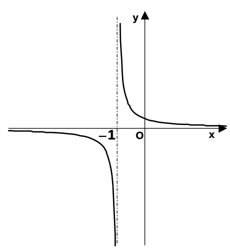
(A)



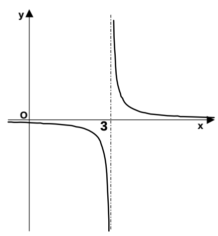
(B)



(C)



(D)



(Prova Global 2000)

34. a) Estude a função, real de variável real, definida por $f(x) = \frac{3x+1}{x+5}$ quanto à existência de assimptotas.

b) Caracterize a função $f \circ g$, sabendo que se tem $g(x) = x - 5$.

(Prova Global 2000)

35. Os proprietários das lojas da rua Tão Javira pretendem estudar a aderência das pessoas a essa rua. Eles concluíram que, desde as 8 até às 20 horas, o número de pessoas num instante **t** é dada pela função $\mathbf{N(t)} = 120 + 98\mathbf{t}^2 - 7\mathbf{t}^3$, sendo **t** em horas.(t = 0 corresponde às 8 horas)

a) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine a altura do dia em que há mais pessoas na rua Tão Javira. Indique o resultado em horas e minutos.

b) Numa breve composição (com o máximo de 10 linhas), comente a evolução do número de pessoas na rua Tão Javira, das 8 às 20 horas. Enriqueça-a com o traçado de um gráfico.

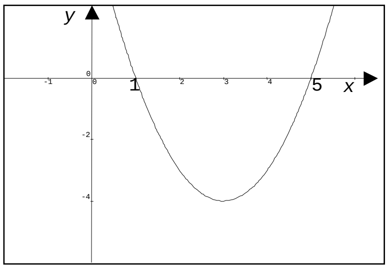
(Prova Global 2000)

36. Sendo $h(x) = 3x^2 + 5$ e $g(x) = 4 - x$ duas funções reais de variável real, o domínio da função $\frac{h}{g}$ é:

(A) R **(B)** R \ {0} **(C)** R \ {4} **(D)** R^+

(Prova Global 2000-2ªchamada)

38. Considere o gráfico de f ' (derivada de f) representado na figura ao lado.

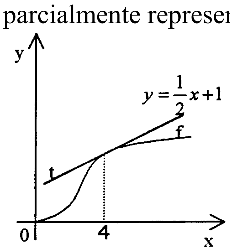


Podemos concluir que, no intervalo [1, 5], a função f é:

(A) Crescente **(B)** Negativa
(C) Decrescente **(D)** Constante

(Prova Global 2000-2ªchamada)

41. Considere uma função f de domínio R, parcialmente representada na figura.



A recta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4.
O valor de f '(–4) no caso de f ser par é:

(A) ½ (B) –1/2 (C) 2 (D) –2

(Prova Global 2001-1ªchamada)

48. Um grupo de biólogos ao estudar o crescimento de uma certa espécie de árvore concluiu que esta cresce de acordo com a função $A(t) = \frac{30t}{t+5}$, em que A é a altura em metros e t o tempo em anos, desde que a planta começa a germinar.

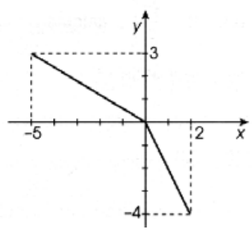
a) Qual a altura da árvore quando atinge 25 anos de vida?

b) Há uma altura máxima que a árvore nunca ultrapassará. Que altura é essa?

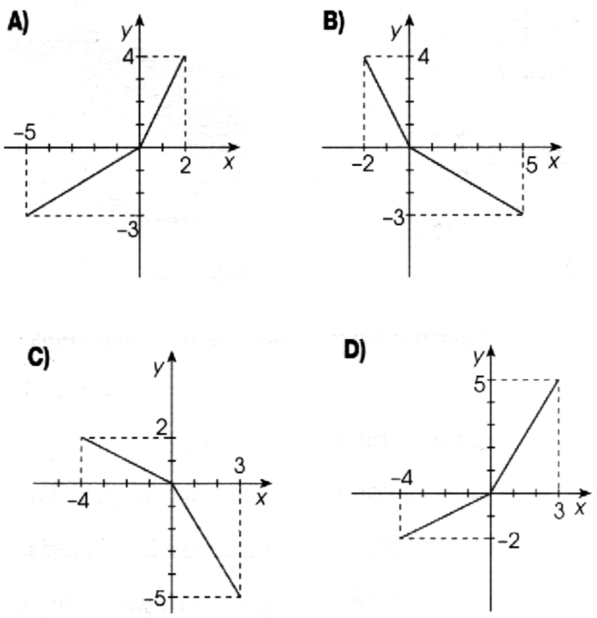
c) Calcule a taxa de variação para t=10 e interprete o resultado no contexto do problema.

(Prova Global 2001-2ªchamada)

49. A figura ao lado é a representação gráfica de uma função g



Então o gráfico de g^{-1} será:



(Prova Global 2002-1ªchamada)

51. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por

$$\mathbf{A}(p) = 2 - \frac{23}{p+9}.$$

1. a) Segundo esta igualdade, qual a altura de um rapaz com 20 quilogramas de peso? Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

b) Considere a equação $\mathbf{A}(p) = 1{,}4$. Recorrendo à calculadora, resolva-a e interprete a solução no contexto do problema. Na sua explicação, deve incluir um ou mais gráficos que considerar para resolver esta questão. Apresente o resultado arredondado às unidades.

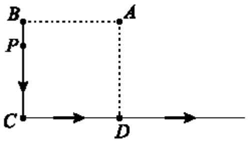
2. Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

a) Mostre que a função A é crescente em [5,50].

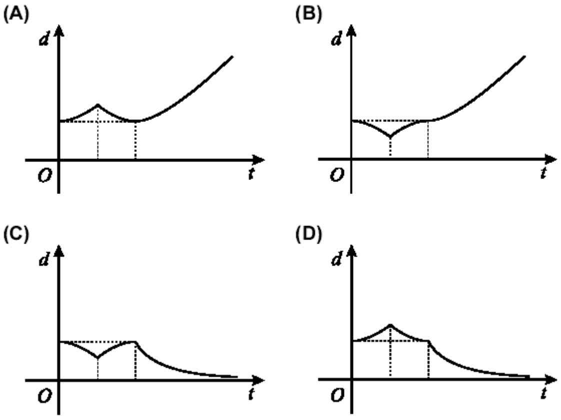
b) Considere agora uma certa função P que representa o peso de uma criança do sexo masculino segundo a sua idade. Sabendo que se tem $\mathbf{P}(5) = 19$, calcule e interprete $(\mathbf{A} \circ \mathbf{P})(5)$. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

(Prova Global 2002-1ªchamada)

55. Na figura estão representados:• um quadrado [ABCD] • uma semi-recta $\dot{C}D$.

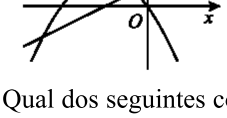


Admita que um ponto P, partindo de B, se desloca, a velocidade constante, ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento [BC] e seguidamente a semi-recta $\dot{C}D$). Qual dos gráficos seguintes dá a distância *d*, do ponto P ao ponto A, em função do tempo *t*, contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento?



(Teste intermédio 2006)

56. Na figura estão representadas:• parte do gráfico de uma função quadrática f; • parte do gráfico de uma função afim g.



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?

(A) $]-\infty, -4[\ \cup\ [-2, 0[$ **(B)** $]-\infty, -4]\ \cup\ ]-2, 0]$

(C) $]-4, -2]\ \cup\ ]0, +\infty[$ **(D)** $[-4, -2[\ \cup\ [0, +\infty[$

(Teste intermédio 2006)

57. Na figura 1 está representada graficamente a função f. Na figura 2 está representada graficamente a função g.

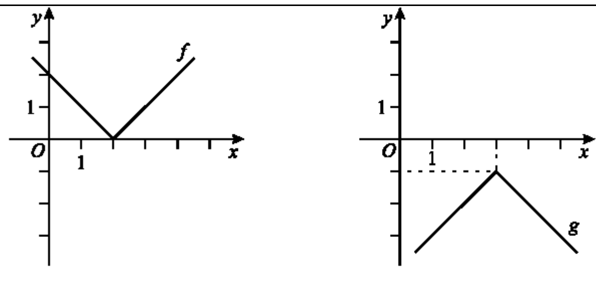


Figura 1 Figura 2

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x) = -f(x+1) - 1$ **(B)** $g(x) = f(x-1) + 1$

(C) $g(x) = f(x+1) - 1$ **(D)** $g(x) = -f(x-1) - 1$

(Teste intermédio 2006)

58. De uma função quadrática f sabe-se que o conjunto solução da inequação f(x)≥0 é o intervalo [1,5]. Qual é o contradomínio de f?

(A) $]-\infty, f(1)]$ **(B)** $[f(5), +\infty[$

(C) $[f(3), +\infty[$ **(D)** $]-\infty, f(3)]$

(Teste intermédio 2006)

59. Considere a função f, de domínio R\{1}, definida por $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$

a) Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto dos números reais *x* tais que f(x)≤−1. Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

b) O gráfico da função f tem duas assimptotas. Escreva as suas equações.

(Teste intermédio 2006)

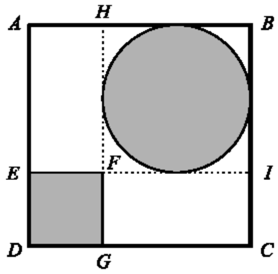
60. A Anabela espremeu várias laranjas e obteve três litros de sumo de laranja, para um lanche que vai oferecer aos amigos. Para que a quantidade de bebida seja suficiente, a Anabela vai juntar água aos três litros de sumo de laranja obtidos. Admita que o sumo de laranja puro, ou seja, acabado de espremer, já contém 92% de água.

a) Designando por *x* a quantidade (em litros) de água que vai ser acrescentada aos três litros de sumo de laranja puro, justifique que a percentagem de água existente na bebida que a Anabela vai oferecer aos amigos é dada por $\frac{100x+276}{x+3}$

b) Qual é a quantidade máxima de água que a Anabela pode acrescentar aos três litros de sumo de laranja puro, de tal modo que a sua bebida não tenha mais de 97% de água? Apresente o resultado em litros.

(Teste intermédio Matemática B 2006)

61. Na figura está o primeiro esboço de um logotipo que o João está a construir para o Clube de Matemática da sua escola. Dentro do quadrado [ABCD] estão representados, a sombreado, um círculo e um quadrado [DEFG], nos quais vão ser colocados desenhos alusivos a jogos matemáticos. Na região branca, ou seja, não sombreada, vão ser colocados símbolos matemáticos e texto.



Sabe-se que:• $\overline{AB} = 1$;• o círculo está inscrito no quadrado [FHBI]. Designando por *x* o lado do quadrado [DEFG], determine o valor de *x* para o qual a área da região branca é máxima. Recorrendo a processos analíticos, apresente o valor pedido.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

• exprima, em função de x,

- a área do quadrado sombreado,

- o raio do círculo sombreado,

- a área do círculo sombreado,

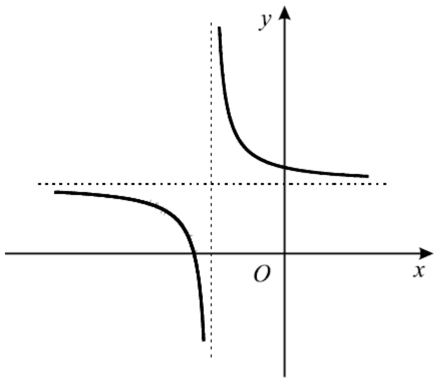
- a área da região sombreada,

- a área da região branca;

• determine o valor pedido.

(Teste intermédio Matemática B 2006-adaptação)

62. Para um certo valor de *a* e para um certo valor de *b*, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função *f* cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \ \wedge \ b > 0$ (B) $a > 0 \ \wedge \ b < 0$

(C) $a < 0 \ \wedge \ b > 0$ (D) $a < 0 \ \wedge \ b < 0$

(Teste intermédio 2007)

63. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2+1}{2-x} < 0$

(A) $]-1,2[$ (B) $]1,2[$ (C) $]-\infty,2[$ (D) $]2,+\infty[$

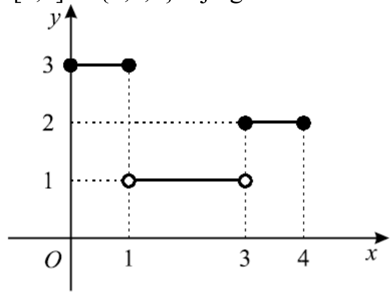
(Teste intermédio 2007)

64. Considere as seguintes funções: f:{1,2,3}→{1,2,3} definida pela tabela

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 1$

h:[0,4] →{1,2,3}cujo gráfico é



Indique o valor de $f^{-1}(2) + (goh)(\sqrt{2})$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

(Teste intermédio 2007)

65. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - x^2$. Seja *t* a recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa ½. Qual é a inclinação da recta *t* ?

(A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) 150°

(Teste intermédio 2007)

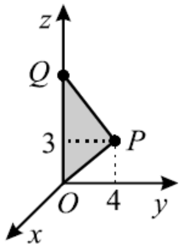
66. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo dos primeiros oito minutos da experiência, de acordo com a função $v(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$ onde *t* designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do início da experiência, e *v*(*t*) designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em centenas de rotações por minuto).

a) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência. Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine durante quanto tempo é que, nos primeiros oito minutos da experiência, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6000 rotações por minuto. Escreva o resultado final em minutos e segundos (com o número de segundos arredondado às unidades). Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema (apresente as abcissas com duas casas decimais).

(Teste intermédio 2007)

67. Considere, em referencial o.n. *Oxyz* , o ponto P(0,4,3). Admita que um ponto *Q* se desloca ao longo do semieixo positivo *Oz*, nunca coincidindo com a origem *O* do referencial. Seja *f* a função que faz corresponder, à cota *z* do ponto *Q*, o perímetro do triângulo [OPQ].

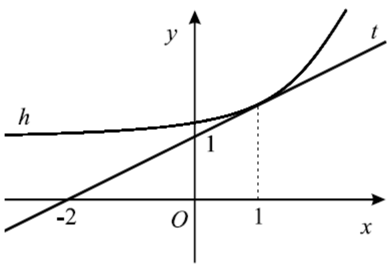


a) Mostre que $f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

b) Sem recorrer à calculadora, determine a cota do ponto *Q* de modo que o perímetro do triângulo [OPQ] seja igual a 16.

(Teste intermédio 2007)

68. Na figura estão representadas, em referencial o.n. *xOy*:
- parte do gráfico de uma função *h*
- uma recta *t*, tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 1

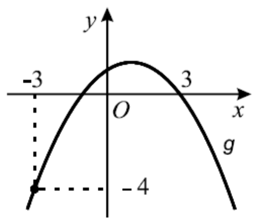


Tal como a figura sugere, a recta *t* intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa –2 e o eixo *Oy* no ponto de ordenada 1. Indique o valor de *h*´(1), derivada da função *h* no ponto 1

(A) –2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

(2.º Teste intermédio 2008)

69. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *g*

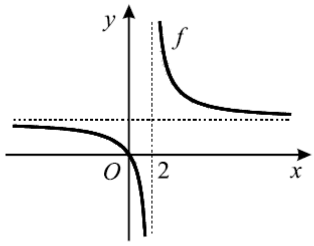


Seja *f* a função de domínio ℝ definida por *f*(*x*) = |*x*|. Qual é o valor de (*f*o*g*)(–3)?

(A) –4 (B) 0 (C) 3 (D) 4

(2.º Teste intermédio 2008)

70. Na figura está representada, em referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico de uma função *f*, bem como as duas assimptotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere,
- a origem do referencial pertence ao gráfico de *f*
- uma das assimptotas é paralela ao eixo *Ox*
- a outra assimptota é paralela ao eixo *Oy* e intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 2

a) Seja *g* a função, de domínio ℝ, definida por $g(x) = 3x + 9$. Tendo em conta o gráfico de *f* e a expressão analítica de *g*, resolva a inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$, completando a seguinte tabela de variação de sinal, que deve transcrever para a sua folha de prova:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		
$g(x)$		
$f(x) \times g(x)$		

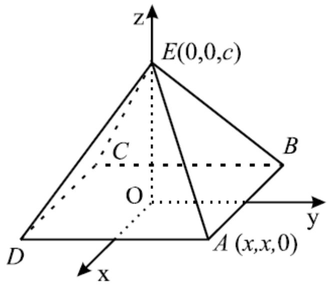
Apresente o conjunto solução da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Admita agora que:
- a assimptota do gráfico de *f* paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 3$
- *f* é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$,

onde *a*, *b*, e *c* designam números reais. Indique os valores de *a* e de *c* e determine o valor de *b*.

(2.º Teste intermédio 2008)

71. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular.



Admita que o vértice E se desloca no semieixo positivo Oz, entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos. Com o movimento do vértice E, os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano xOy, de tal forma que:
- a pirâmide permanece sempre regular
- o vértice A tem sempre abcissa igual à ordenada
- sendo *x* a abcissa de A e sendo *c* a cota de E, tem-se sempre *x* + *c* = 6

a) Seja $V(x)$ o volume da pirâmide, em função de *x* ($x \in]0,6[$). Mostre que $V(x) = 8x^2 - \frac{4}{3}x^3$

b) Utilizando a função derivada de V e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função V quanto à monotonia, conclua qual é o valor de x para o qual é máximo o volume da pirâmide e determine esse volume máximo.

c) Admita agora que $x = 1$. Indique, para este caso, as coordenadas dos pontos A, B e E e determine uma equação cartesiana do plano ABE.

(2.º Teste intermédio 2008)

72. A Maria vai sempre de carro, com o pai, para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito horas da manhã. Admita que, quando a Maria sai de casa t minutos <u>depois das sete e meia</u>, a duração da viagem, em minutos, é dada por $d(t) = 45 - \frac{5600}{t^2+300}$ $(t \in [0,30])$

As aulas da Maria começam sempre às oito e meia.

a) Mostre que, se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, chega à escola às 8 h 11 m, mas, se sair de casa às 7 h 55 m, já chega atrasada às aulas.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva o seguinte problema: *Até que horas pode a Maria sair de casa, de modo a não chegar atrasada às aulas?*

A sua resolução deve incluir:

• uma explicação de que, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$

• o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora

• a resposta ao problema em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

(2.º Teste intermédio 2008)

73. O gráfico de uma função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo cujo vértice é o ponto (3,2). Seja f ' a função derivada da função f. Qual dos valores seguintes é negativo?

(A) f '(1) (B) f '(2) (C) f '(3) (D) f '(4)

(2.º Teste intermédio 2009)

74. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 2. Seja g a função de domínio R definida por $g(x)=-2x+1$. Qual é o valor de $(f \circ g)(2)$?

(A) –2 (B) –1 (C) 1 (D) 2

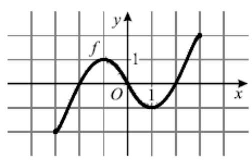


Figura 2

(2.º Teste intermédio 2009)

75. Considere a função f, de domínio R\{–2}, definida por $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$. <u>Sem recorrer à calculadora</u>, resolva os itens seguintes:

a) Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Na figura 3 estão representados, em referencial o.n. xOy:

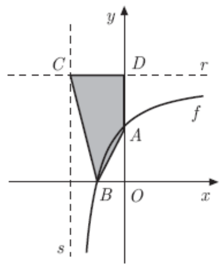


Figura 3

• parte do gráfico da função f

• as rectas r e s, assimptotas do gráfico de f

• o quadrilátero $[ABCD]$

A e B são os pontos de intersecção do gráfico da função f com os eixos coordenados. C é o ponto de intersecção das rectas r e s. D é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Oy. Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$

(2.º Teste intermédio 2009)

76. Na figura 4 está representado um referencial o.n. $Oxyz$. Cada um dos pontos A, B e C pertence a um eixo coordenado. O ponto P pertence ao plano ABC. O ponto P desloca-se no plano ABC, de tal modo que é sempre vértice de um prisma <u>quadrangular regular</u>, em que os restantes vértices pertencem aos planos coordenados. O plano ABC é definido pela equação $x + 2y + 3z = 9$

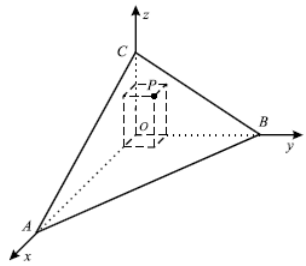


Figura 4

a) Seja a a abcissa do ponto P ($a \in]0,3[$). Mostre que o volume do prisma é dado, em função de a, por $V(a) = 3a^2 - a^3$

b) Estude a função V quanto à monotonia, <u>sem recorrer à calculadora</u>, e conclua qual é o valor de a para o qual o volume do prisma é máximo.

c) Seja r a recta que contém o ponto A e é perpendicular ao plano ABC. Determine uma equação vectorial da recta r.

(2.º Teste intermédio 2009)

77. Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio electrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às oito horas e sair ao meio-dia. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois do meio-dia. Sempre que um trabalhador chega t minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia, que ele tem de permanecer na empresa é dado por

$$c(t) = \frac{t^2+25t}{t+1} \quad (t \geq 0)$$

a) Na segunda-feira, o Manuel entrou na empresa às nove horas e um quarto. A que horas deveria ter saído, de modo a cumprir o estipulado no contrato? Apresente a sua resposta em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

b) Ontem, o Manuel saiu da empresa às 12 horas e 25 minutos. Com quantos minutos de atraso é que ele chegou à empresa?

c) Ao sair ontem da empresa, o Manuel pensou: «Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar quase meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.» Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 40% desse tempo (por exemplo, um atraso de 10 minutos deve ser compensado com 14 minutos de trabalho depois do meio-dia). Numa pequena composição, compare a proposta do Manuel com o contrato em vigor, contemplando os seguintes tópicos:

• justifique que, de acordo com a proposta do Manuel, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa *t* minutos, é dado por $p(t) = 1,4t$;

• refira se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor;

• considerando que, para um certo atraso, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, refira:

– o atraso;

– o tempo de permanência, depois do meio-dia, que esse atraso determina.

Utilize a calculadora para comparar os gráficos das duas funções (*c* e *p*); transcreva para a sua folha de prova esses gráficos e assinale o ponto relevante que lhe permite responder a algumas das questões colocadas, bem como as suas coordenadas, arredondadas às unidades.

(2.º Teste intermédio 2009)

78. Seja *f* a função cujo gráfico está representa-do na figura 1.

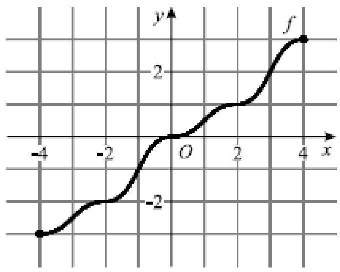


Figura 1

Seja f^{-1} a função inversa da função *f*. Qual é o valor de $f(-4) + f^{-1}(2)$?

(A) –2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(2.º Teste intermédio 2010)

79. Sejam *f* e *g* duas funções reais de variável real. Sabe-se que: • a função *f* tem domínio $\mathbb{R}$ e tem cinco zeros;

• a função *g* tem domínio $\mathbb{R}$ e tem três zeros;

• um, e só um, dos zeros da função *f* também é zero da função *g*

Quantos zeros tem a função $\frac{f}{g}$?

(A) 7 ((B) 5 (C) 4 (D) 2

(2.º Teste intermédio 2010)

80. Seja *f* a função cujo gráfico está representado na figura 2. Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x + 3$.

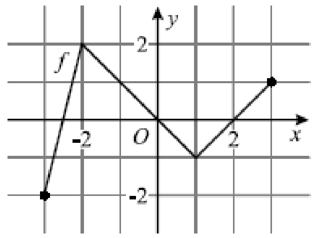


Figura 2

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(2.º Teste intermédio 2010)

81. Na figura 3, está representado um triângulo rectângulo [ABC] cujos lados medem 3, 4 e 5. Considere que um ponto D se desloca ao longo do cateto [AB], nunca coincidindo com o ponto A. Para cada posição do ponto D, seja *x* o comprimento do segmento de recta [AD]. Qual das expressões seguintes dá o perímetro do triângulo [ACD], em função de *x* ?

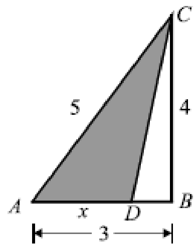


Figura 3

(A) $x + 4 + \sqrt{25 - x^2}$ **(B)** $x + 5 + \sqrt{25 - x^2}$

(C) $x + 4 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$ **(D)** $x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$

(2.º Teste intermédio 2010)

82. Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B. Admita que, *t* anos após o início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A é dado aproximadamente por $a(t) = \frac{11t+6}{t+1} (t \geq 0)$

e que o número de animais, em milhares, da espécie B é dado aproximadamente por $b(t) = \frac{t+9}{t+3} (t \geq 0)$

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

a) Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A. Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

b) Na figura 5, estão representadas graficamente as funções *a* e *b*. Tal como estes gráficos sugerem, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor. Determine esse valor, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções *a* e *b* cujas equações deve apresentar.

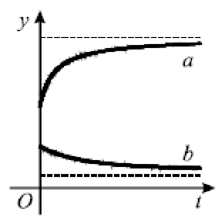


Figura 5

(2.º Teste intermédio 2010)

83. Considere:

• a função *f*, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 3 + \frac{6}{x}$

• a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$

Resolva os itens a), b) e c), usando exclusivamente métodos analíticos.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

a) Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \le 5$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Seja P o ponto do gráfico da função f que tem abcissa igual a 2. Seja r a recta tangente ao gráfico da função f no ponto P. Determine a equação reduzida da recta r

c) Na figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g. Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g, sendo as suas ordenadas, respectivamente, o máximo relativo e o mínimo relativo desta função. Os pontos C e D pertencem ao eixo Ox. A abcissa do ponto C é igual à do ponto B e a abcissa do ponto D é igual à do ponto A. Determine a área do triângulo [OAC]

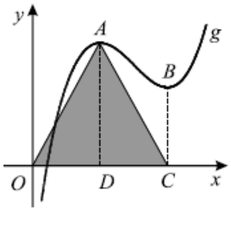


Figura 6

d) A equação $f(x) = g(x)$ tem exactamente duas soluções, sendo uma delas positiva e a outra negativa. Determine a solução positiva, utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora. Apresente essa solução arredondada às centésimas. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

(2.º Teste intermédio 2010)

84. Seja f a função, de domínio $[1,+\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Qual é o valor de $f^{-1}(3)$?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

(2.º Teste intermédio 2011)

85. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$. Para um certo número real a, tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$. Qual é o valor de a ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

(2.º Teste intermédio 2011)

86. Seja f uma função real de variável real. Sabe-se que:

• $f'(2) = 9$

• a recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2, intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada -15.

Qual é o valor de f(2)?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2.º Teste intermédio 2011)

87. Uma floresta foi atingida por uma praga. Admita que a área, em milhares de hectares, da região afectada por essa praga é dada por $A(t) = \frac{2t}{t^2+3}$ $(t \ge 0)$ (Considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao início da praga.)

a) Houve um certo intervalo de tempo durante o qual a área da região afectada pela praga foi, pelo menos, de 500 hectares. Nesse intervalo de tempo, a floresta esteve seriamente ameaçada. Durante quanto tempo esteve a floresta seriamente ameaçada? Na sua resposta deve:

• escrever uma inequação que lhe permita resolver o problema;

• resolver analiticamente essa inequação;

• apresentar o valor pedido.

b) Utilize as capacidades gráficas da calculadora para resolver o seguinte problema: *Ao fim de quanto tempo, contado a partir do início da praga, foi máximo o valor da área atingida por essa praga?*

Na sua resposta deve:

• reproduzir o gráfico visualizado na calculadora;

• assinalar, no gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema e indicar as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas;

• apresentar a solução do problema em dias, arredondada às unidades (considere 1 ano = 365 dias).

(2.º Teste intermédio 2011)

88. Considere:

• a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$

• a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Utilize métodos exclusivamente analíticos na resolução dos três itens seguintes.

a) Estude a função f quanto à monotonia e quanto aos extremos relativos. Na sua resposta deve apresentar:

• o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;

• o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;

• os extremos relativos, caso existam.

b) Sabe-se que -1 é um zero da função f. Caracterize a função $f \times g$. Na sua resposta deve:

• indicar o domínio da função $f \times g$

• apresentar $(f \times g)(x)$ na forma de um polinómio do terceiro grau.

c) Seja P o ponto de intersecção das assimptotas do gráfico da função g. Para um certo número real k, o ponto P pertence ao gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) + k$. Determine o valor de k

(2.º Teste intermédio 2011)

Soluções: 1. R\{-2,0}; h(x)=(x-1)/x; CS=]-∞,0[∪]1,+∞[; VFF 2. não; 4; CS=]-∞,0]∪[1,+∞[; FV 3. F; 10; R^+\{3}; 2º
4. D 5. D; C 6. Dj=R\{-2,1};CS=]-2,-1]∪[5,+∞[7. C 8. R\{2}; -3; (x+3)(x-2); não; CS=]-3,+∞[\{2}; 1 (cresc.)
9. C 10. B 11. D 12. C 13. D 14.A 15. –10; (x-1)(x+2)(x+5);(x+2)(x+5)/x e D=R\{0,1}; CS=[-5,-2]∪]0,+∞[.
16. –2; R\{-2;-1;0}; 1; CS=]-∞,-2[∪]-1,1]\{0} 17. D 18. A 19. D 20. D 21. C 22. A 23. A 24. A
25. D 26. A 27. C 28. 525 m; 1000m/h; 3025m; 10,5h; 1100m/h 29. B 30. D 31. 18250cts; 10anos; -900cts/ano
32. C 33. C 34. x=-5 e y=3; (3x-14)/x 35. 17h20m 36. C 37. D 38. C 39. x=-1 e y=0; (0,-1) e (1,0);]-∞,-2[∪]-1,2[40. C 41. B 42. 66d-3d^2; 360p/d; 2º e 20º; falsa 43. R\{-4,-2,-1,1};]-∞,0]∪]1,+∞[44. D 45. C
46. C 47. 1,5;]-2,-1[∪]3,+∞[48. 25m; 30m; 0,7m/a 49. C 50. B 51. 1,21; 29; 1,18 52. A 53. B
54. 26; 20; 19 e 5291 55. A 56. D 57. D 58. D 59.]1,4/3]; y=2 e x=1 60. 5 61. π/(π+4)
62. B 63. D 64. C 65. C 66. 81; 4´5´´ 67. 6 68. C 69. D 70.]–∞,–3]∪[0,2[; 3, 6 e 2
71. 4 e 128/3; 5y+z-5=0 72. 7h52min 73. D 74. A 75.]–∞,–2[∪]2,+∞[; 5 76. 2; (x,y,z)=(9,0,0)+k(1,2,3)
77. 13h39’; 5 78. B 79. C 80. D 81. D 82. 3000; 10000 83.]–∞,0[∪[3,+∞[; y=-3/2 x+9; 22/3; 5,15
84. C 85. B 86. C 87. 2; 632 88. Máx=16 e mín=-16; 1

O professor: RobertOliveira