Escola Secundária de Francisco Franco (2009/2010)

www.esffranco.edu.pt

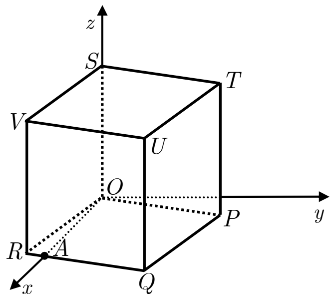
Resumo do 5º e 6º testes de Matemática A

11º ano

1. *"Winston pôs-se de joelhos e examinou a junta onde o cano formava um ângulo."*

1984, George Orwell

Na figura do lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OPQRSTUV]$, sendo que a base $[OPQR]$ está contida no plano xOy.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox e à aresta $[RQ]$ e tem coordenadas $\left(\frac{10}{3}, 0, 0\right)$;
- o vector $\overrightarrow{PA}$ tem coordenadas $\left(\frac{7}{3}, -3, 0\right)$.

Qual é a amplitude, em graus e arredondada às décimas, do ângulo AOP?

2. *"Entre as fronteiras dos super-estados, e sem alguma vez cair de uma por todas em poder de qualquer deles, há um quadrilátero irregular cujos vértices são Tânger, Brazzaville, Darwin e Hong Kong; esta área alberga quase um quinto da população terrestre."*

1984, George Orwell

Na figura do lado está representado um quadrilátero irregular, região admissível de um certo problema de Programação Linear.
Sabe-se que, para essa região, há duas funções objectivo a minimizar; uma está definida por $L_1 = 10x + y$ e a outra por $L_2 = 0{,}1x + y$.

Considere as seguintes afirmações:

(i) A solução do problema para L_1 é $x = 2$ e $y = 3$

(ii) A solução do problema para L_2 é $x = 4$ e $y = 2$

Assim, é possível concluir que:

(A) A afirmação (i) é verdadeira e a (ii) é falsa.

(B) A afirmação (i) é falsa e a (ii) é verdadeira.

(C) Ambas as afirmações são falsas.

(D) Ambas as afirmações são verdadeiras.

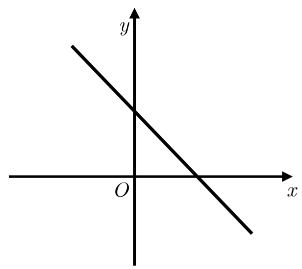
3. Sejam f a função racional representada parcialmente ao lado e g a função definida por $g(x) = x + 2$
Tal como a figura sugere, o gráfico de f contem duas assimptotas: uma é o eixo das ordenadas e a outra é a recta t.
Sabe-se que a equação de t é $y = b$, sendo $b = (g \circ g)(0,5)$.
Qual pode ser a expressão da função f?

(A) $4,5 + \frac{2}{x-0{,}5}$ **(B)** $2,5 + \frac{2}{x-0{,}5}$ **(C)** $4,5 + \frac{2}{x}$ **(D)** $2,5 + \frac{2}{x}$

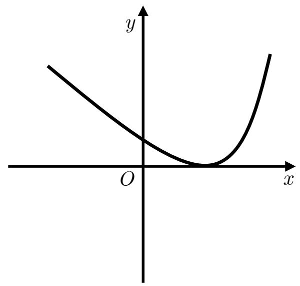
4. De uma função g de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

Qual dos seguintes **não pode** representar o gráfico da função g', **derivada** de g?

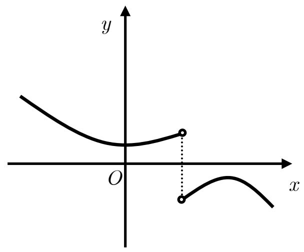
(A)



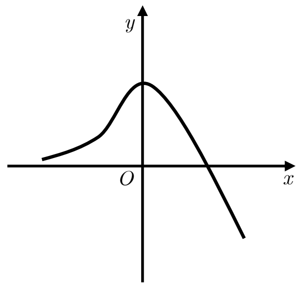
(B)



(C)



(D)



5. Dado um número real α, seja (a_n) a sucessão definida, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, da seguinte maneira:

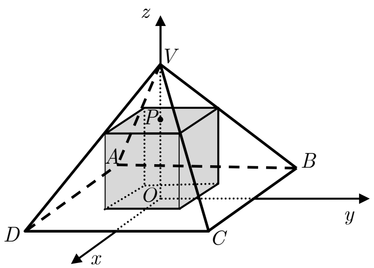
$$\begin{cases} a_1 = \operatorname{sen}^2\alpha \\ a_2 = \cos^2\alpha \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$$

Qual é o 5.º termo de (a_n)?

1. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura, estão representados uma pirâmide e um prisma, ambos quadrangulares e contidos no plano xOy.

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é um quadrado de área 16;
- a aresta $[DC]$ é paralela ao eixo Oy;
- o vértice V tem coordenadas $(0,0,4)$.



Admita que um ponto P se desloca no segmento $[OV]$ nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos. Para cada posição do ponto P tem-se que:

- a base superior do prisma tem centro no ponto P e é a secção produzida na pirâmide pelo plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto P;
- a base inferior do prisma é um quadrado de área e tem centro na origem do referencial.

Seja $V(k)$ o volume, em função de k $(k \in]0,4[)$, do prisma

1.1. Mostre que $V(k) =$

1.2. Recorrendo a **métodos exclusivamente analíticos**, determine o valor de k para o qual é máximo o volume do prisma.

2. Considere a sucessão definida por $b_n =$

Exceptuando eventuais cálculos numéricos, resolva os três itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

2.1. Mostre que (b_n) é monótona.

2.2. Verifique que $\frac{17}{6}$ é termo de (b_n) e indique a sua ordem.

2.3. Justifique que a sucessão (b_n) é limitada indicando o conjunto de **todos** os minorantes e o conjunto de **todos** os majorantes.

3. A Isaura inscreveu-se numa rede social na internet e tem, após n semanas, aproximadamente (a_n) "amigos", sendo

$$a_n =$$

3.1. Segundo este modelo, quantos "amigos" (aproximadamente) terá a Isaura após 105 dias? Apresente o resultado arredondado às unidades.

3.2. Recorra à calculadora para resolver o seguinte problema:

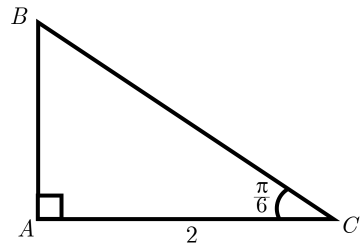
Após quantas semanas (aproximadamente) terá a Isaura vinte vezes mais "amigos" do que teve na terceira semana?

Especifique a equação a resolver e apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas relevantes de algum ponto para a resolução do problema (apresente as abcissas com duas casas decimais).

4. Considere as sucessões definidas por $u_n = \sqrt{8n-7}$ e $v_n = n-5$.

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), mostre que os gráficos de (u_n) e (v_n) se intersectam em apenas um ponto e indique as suas coordenadas.

1. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$, rectângulo em A.
Sabe-se que $\overline{AC} = 2$ e que a amplitude do ângulo ACB é igual a $\frac{\pi}{6}$.
Qual é o valor de ?



(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $2\sqrt{3}$ **(D)** $\sqrt{3}$

2. Num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r está definida pela condição $x - 2 = y \wedge z = 5$ e o plano α definido pela equação .
Qual é a afirmação verdadeira?

(A) r é perpendicular a α **(B)** r é paralela a α

(C) r está contida em α **(D)** r é concorrente mas não perpendicular a α

3. Ao lado está, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tal como a figura sugere:

- A expressão de f é do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- 2 é um zero de f.

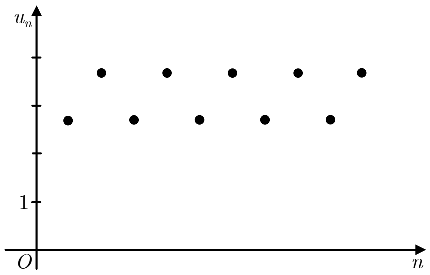
Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 1$
Qual dos seguintes é o conjunto-solução da condição $(f \times g)(x) \geq 0$?

(A) $[-1, 2]$ **(B)** $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

(C) $[-1, 1[\cup [2, +\infty[$ **(D)** $]-1, 1[\cup]2, +\infty[$

4. Ao lado está parte do gráfico da sucessão (u_n). Como se pode definir, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, essa sucessão?

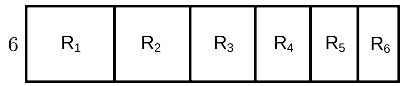
Nota: e representa o número de Neper.



5. *"- Seis sétimos da superfície do globo estão cobertos por mar, constituindo uma área tão vasta que milhares de navios estão sempre, literalmente, fora de vista da terra ou de outros navios. Oitenta por cento do comércio mundial continua a ser realizado por mar, o que corresponde a pouco menos de seis mil milhões de toneladas. E existem quatro mil portos comerciais viáveis em todo o mundo."*

O AFEGÃO, Frederick Forsyth

Na figura do lado, todos os rectângulos têm um lado igual a 6 unidades. Sabe-se que a área do rectângulo R_1 é igual a 42, a área do rectângulo R_2 é 36, a área do rectângulo R_3 é $\frac{216}{7}$ e assim sucessivamente.



A que é igual a soma de **todas** as áreas de todos os rectângulos construídos desta forma?

1. O Ildefonso fez a seguinte experiência: tirou um cubo de gelo do congelador, deixou-o à temperatura ambiente durante alguns minutos, voltou a meter o cubo no congelador e tirou-o novamente passado algum tempo.
Considere que, nos primeiros 9 minutos da experiência, a temperatura do cubo de gelo (em graus Celsius) foi dada, após t minutos, pela função definida por

1.1. **Usando exclusivamente métodos analíticos** (e a calculadora para eventuais cálculos numéricos), determine quanto tempo passou desde que o cubo de gelo foi reintroduzido no congelador até ser novamente retirado. Apresente o resultado em minutos e segundos (com estes arredondados às unidades).
Em caso de cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

1.2. Durante a experiência, quantas vezes a temperatura do cubo de gelo foi igual a -8 graus Celsius? **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, indique, em minutos e arredondado às centésimas, quanto tempo passou para cada caso.
Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) para a resolução do problema.

2. A Soraia seguiu o plano do seu treinador de natação para se preparar para o campeonato em Junho. Ela começou em Maio e, no dia n desse mês, ela nadou (u_n) quilómetros, sendo $u_n =$

2.1. Quantos quilómetros nadou a Soraia exactamente após duas semanas de Maio?

2.2. Segundo este plano, houve algum dia em que a Soraia nadou $10\,500$ metros? Justifique a resposta.

2.3. A Soraia, que é um bocado preguiçosa, tinha proposto ao seu treinador um outro plano de treinos: 1000 metros no primeiro dia, 1050 metros no segundo dia, $1102,5$ metros no terceiro, $1157,625$ quarto e assim sucessivamente.
Em qual dos planos anteriores a Soraia faria menos quilómetros no total? Justifique convenientemente a resposta.

3. Considere as sucessões definidas por $a_n =$ e $b_n =$

3.1. Mostre que $b_n = \frac{20}{3n}$. Em seguida, **sem usar a calculadora**, determine a ordem a partir da qual a sucessão $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ é superior à sucessão $\left(\sqrt{n}\right)$.

3.2. Usando a alínea anterior e as propriedades dos infinitamente grandes e dos infinitésimos, justifique que (b_n) é um infinitésimo.

3.3. Tendo em conta a alínea anterior, justifique que (a_n) é convergente e indique o seu limite.

4. Seja (w_n) uma sucessão de termos positivos e tais que $w_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Usando o **teorema das sucessões enquadradas**, mostre que a sucessão definida por
$v_n = \frac{3+w_n}{n}$ é um infinitésimo.