Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2008/2009)

Resumo do 5º mini e 6º testes de Matemática A

11º ano

www.ebsaas.com

1. Dado um número real α, sabe-se que ele é solução da equação .
Qual dos números seguintes é também solução dessa equação?

(A) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ **(B)** $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ **(C)** $\pi - \alpha$ **(D)** $2\pi - \alpha$

2. Na figura do lado estão, num referencial o.n. xOy, as rectas perpendiculares r, de equação , e AB.
Tal como a figura sugere, o ponto A pertence ao eixo Oy e à recta r e o ponto B pertence ao eixo Ox.
Qual é o valor da área do triângulo $[ABO]$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

3. Seja g uma função derivável em $\mathbb{R}$ e considere a tabela do sinal da função g', **derivada** de g:

No que se refere à função g e segundo esta tabela, é possível concluir que:

(A) Há um máximo relativo em $x = 2$.

(B) Há um mínimo relativo em $x = 3$.

(C) Há dois zeros, de abcissas 2 e 3.

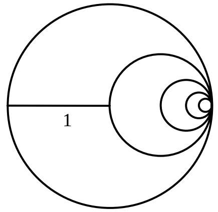
(D) Há dois extremos, de abcissas 2 e 3.

4. É dada uma função f definida em $\mathbb{R}$. Sabe-se que o número 0 pertence ao domínio da função $f \circ f$. Qual das seguintes expressões pode ser a da função f?

5. *"Enquanto com uma das mãos lhe afagava os seios, deixei a outra cair lentamente, traçar círculos no umbigo, na barriga."*

OS DIAS DO FIM, Ricardo de Saavedra

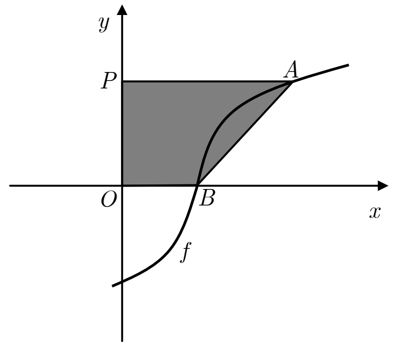
Na figura ao lado, o círculo maior tem raio igual a uma unidade e o raio de cada círculo seguinte é metade do raio do círculo anterior.



Seja (a_n) a sucessão das **áreas** desses círculos.

Como se pode definir por recorrência, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a sucessão (a_n)?

1. Na figura do lado está, num referencial o.n. xOy, parte da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\sqrt[3]{x-2}$.
Além disso, está também representado o trapézio rectângulo $[ABOP]$.



Tem-se que:

- O ponto A percorre a função f de modo que a sua abcissa é sempre superior a 2;
- O ponto B tem abcissa igual a 2;
- O ponto P tem ordenada igual à do ponto A

1.1. Caracterize a função inversa de f.

1.2. Seja g a função que dá a área do trapézio $[ABOP]$, sendo $x > 2$.

1.2.1. Mostre que $g(x) =$.

1.2.2. Verifique que, se a base maior do trapézio for o dobro da base menor, a sua área é igual a $3 \times 2^{4/3}$.

1.2.3. **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, determine o valor de x para o qual a área do trapézio $[ABOP]$ é igual a 100 unidades.

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas do ponto relevante para a resolução do problema (apresente a **abcissa com duas casas decimais**).

1.2.4. Considere agora a função h de domínio $\mathbb{R}$ definida por e seja r a recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1.

Sem usar a calculadora, mostre que a equação de r é $y = 2x + 4$ e determine a abcissa do ponto de intersecção entre o gráfico de g e a recta r.

2. Considere as sucessões definidas por $u_n = \sqrt{n^2 - 3n + 9}$ e $v_n = 2n - 3$.

Sem usar a calculadora, descubra quantos termos têm ambas as sucessões em comum e indique a suas ordens.

3. A Isilda é louca por bombons de chocolate. No entanto, ela tentou reduzir, gradualmente, o número de bombons diários comidos em 2009.

Seja (b_n) a sucessão que dará o número (aproximado) de bombons diários comidos pela Isilda, n dias após o início de 2009. Admita que $b_n =$

3.1. Mostre que $b_n =$ e, usando processos analíticos, verifique que a sucessão (b_n) é monótona decrescente.

3.2. A Isilda previu estar a comer menos de 25 bombons diários passadas duas semanas após o começo de 2009. Foi isso possível com este modelo? Justifique.

3.3. Suponha que a Isilda come também partes de um bombom. Assim sendo, determine, **sem usar a calculadora** (excepto para cálculos numéricos) em que dia e de que mês ela comeu 23 bombons e mais três quartos de outro.

3.4. Admitindo a veracidade deste modelo, conseguirá a Isilda deixar de comer bombons diariamente? Justifique a resposta.

1. "(…) *as palavras «U.S. Navy» inscritas entre os braços em forma de gancho de uma pequena âncora e ao longo da hipotenusa do músculo deltóide.*"

A MANCHA HUMANA, Philip Roth

A figura ao lado ilustra um triângulo rectângulo num referencial o.n. xOy, representativo da região admissível de um problema de Programação Linear.

Pretende-se maximizar a função objectivo e as soluções têm de ser **inteiras**.

A recta da função objectivo coincide com a hipotenusa do triângulo.

Quais são as soluções possíveis (x,y) deste problema?

(A) $(4,4)$, $(5,4)$ e $(6,4)$ **(B)** $(4,8)$, $(5,6)$ e $(6,4)$

(C) $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(4,7)$ e $(4,8)$ **(D)** $(4,8)$ e $(6,4)$

2. No círculo trigonométrico da figura ao lado, M é o ponto médio do segmento $[PO]$ e a recta QM é paralela ao eixo Oy.

Sendo α a inclinação da recta QO, qual é o valor de $\operatorname{tg} \alpha$?

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ **(B)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** -1 **(D)** $-\sqrt{3}$

3. Na figura seguinte está parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$:

Qual das seguintes pode representar a expressão da função f', **derivada** de f?

(A) $\begin{cases} 3x+3 & \text{se} \quad x<-2 \\ -3x+3 & \text{se} \quad -2<x<0 \\ x^2 & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$ **(B)** $\begin{cases} 3x+3 & \text{se} \quad x<-2 \\ -3x+3 & \text{se} \quad -2\le x\le 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 3 & \text{se} \quad x<-2 \\ -3 & \text{se} \quad -2<x<0 \\ 2x & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 3 & \text{se} \quad x<-2 \\ -3 & \text{se} \quad -2\leq x\leq 0 \\ 2x & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$

4. "*A história que ainda não é história, a história que os movimentos do relógio estão agora a desenrolar, a história que prolifera enquanto escrevo, que cresce com a sucessão de um minuto após outro e será bem mais apreendida pelo futuro do que jamais o será por nós.*"

A MANCHA HUMANA, Philip Roth

A senhora Valquíria começou, por motivos de saúde, a caminhar todos os dias. No primeiro dia, ela andou a passo durante 30 minutos, no segundo ela andou durante 30,2 minutos, no terceiro 30,4 minutos e assim sucessivamente, durante um total de 18 dias. Qual foi o tempo **total** andado pela senhora Valquíria?

5. Dado o número de Neper e, considere a sucessão (u_n) definida por recorrência do seguinte modo:

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão (u_n) é:

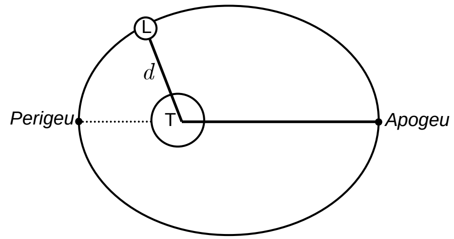
(A) Um infinitamente grande positivo

(B) Um infinitésimo

(C) Uma progressão aritmética

(D) Uma progressão geométrica

1. Como sabe, a Lua descreve uma órbita elíptica em torno da Terra. Na elipse da figura está representado um esquema dessa órbita, estando também assinalados dois pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado da Terra e o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo da Terra.



Admita que a distância, em milhares de quilómetros, da Terra à Lua, é (aproximadamente) dada, em função de t, por

(Neste modelo matemático, $t \in [-3, 27]$ e t representa um dia do mês de Novembro ou de Dezembro de 2008; sabe-se que $t = 0$ corresponde a distância da Terra à Lua no dia 30 de Novembro de 2008, $t = 1$ corresponde a distância no dia 1 de Dezembro de 2008, e assim sucessivamente.)

1.1. No final de 2008, foi noticiado que a Lua passou no *perigeu*. Indique o dia e o mês e também a distância que a Lua esteve da Terra (em milhares de quilómetros).

1.2. Calcule a taxa média de variação em $[0, 10]$. Interprete-a no contexto do problema.

2. O Irineu começou a juntar dinheiro neste ano: na primeira semana, ele guardou 4 cêntimos, na segunda semana guardou 6 cêntimos, na terceira 9 cêntimos, na quarta 13,5 cêntimos e assim sucessivamente.

2.1. Mostre que, ao fim de n semanas, a quantia que o Irineu guardou foi, em cêntimos, igual a

2.2. Se o Irineu prosseguir com este plano, conseguirá ele, no final do ano, ter dinheiro suficiente para comprar um apartamento de 100 000 euros?
Justifique a resposta.

3. No banco, deram à dona Ernestina duas modalidades para receber a sua pensão:

Modalidade A: começa por receber 800 euros em 2010 e, a partir de 2011, há um aumento anual de 50 euros.

Modalidade B: começa por receber 800 euros em 2010 e, a partir de 2011, há um aumento anual de 5%.

Mostre que, apesar de inicialmente a modalidade A ser melhor para a dona Ernestina, é a modalidade B que a partir de um certo ano será melhor para ela.
Indique o ano no decorrer do qual isso acontecerá. Apresente na sua resposta:

4. Considere a sucessão definida por $a_n =$

Justifique, usando as propriedades dos infinitamente grandes e dos infinitésimos, que $\left(a_n\right)$ é convergente para $\frac{3}{5}$.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- *Seja* $b_n = a_n - \frac{3}{5}$. ***Sem usar a calculadora****, determine a ordem a partir da qual a sucessão* $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ *é superior à sucessão* $\left(n\right)$*;*
- *Justifique que a sucessão* $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ *é um infinitamente grande;*
- *Conclua o pretendido.*