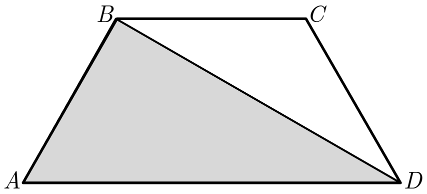
Escola Secundária Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt

Itens para os testes de 10.º ano
Geometria – Matemática A
2010/2011

1. Na figura está representado o trapézio isósceles $[ABCD]$ em que se tem:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \frac{\overline{AD}}{2}$$

Seja a a área do trapézio $[ABCD]$ e b a área do triângulo $[ABD]$.



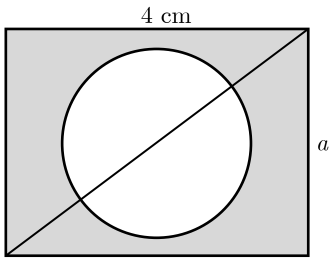
1.1. Mostre que $a = \frac{3}{2}b$

1.2. Seja M o ponto médio de $[AD]$. Sabendo que a amplitude do ângulo BAD é 60°, justifique que o triângulo $[ABM]$ é equilátero e o triângulo $[ABD]$ é rectângulo em B

1.3. Suponha agora que $\overline{AD} = 10$. Calcule, sem usar a calculadora, o valor de a

2. Na figura ao lado, a circunferência e o rectângulo têm o mesmo centro. Sabe-se que:

- um dos lados do rectângulo é igual a $4\,\text{cm}$;
- a designa o outro lado;
- sendo r o raio da circunferência, ele é igual a um quarto do comprimento da diagonal do rectângulo.



2.1. Escreva uma expressão para a em função de r.

2.2. Mostre que a área da zona a sombreado é dada por $16\sqrt{r^2-1} - \pi r^2$

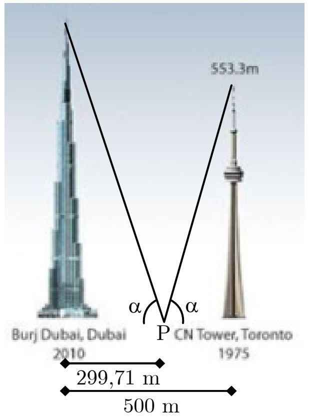
2.3. Calcule a área da zona a sombreado se o rectângulo for um quadrado.

2.4. Suponha agora que o perímetro da circunferência é igual a $20\,\text{cm}$.

2.4.1. Calcule a área da zona a sombreado (em centímetros quadrados e arredondados às centésimas).

2.4.2. Mostre que $a = \frac{4}{\pi}\sqrt{100-\pi}$

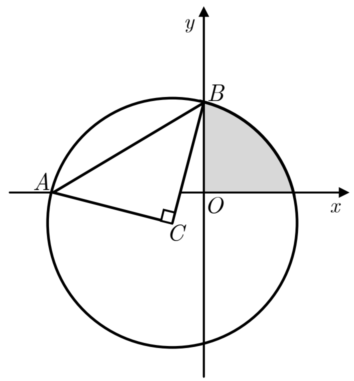
3. Em Janeiro deste ano foi inaugurado, no Dubai, o agora edifício mais alto do mundo construído pelo Homem, o *Burj Khalifa* (destronando do primeiro lugar a *CN Tower*, no Canadá).
Admita que os dois edifícios se encontram na mesma cidade a uma distância de 500 metros.



Como se pode observar pela figura, foi encontado um ponto P a 299,71 metros do *Burj Khalifa* e cuja inclinação vista a partir desse ponto em relação aos topos dos edifícios é a mesma.

Determine, em metros, a altura do *Burj Khalifa* (arredondado às unidades) sabendo que a altura da *CN Tower* é igual a 553,3 metros. Em cálculos intermédios, considere duas casas decimais.

4. No referencial o.n. xOy ao lado, estão uma circunferência e um triângulo $[ABC]$, rectângulo em C.
Os pontos A e B pertencem à circunferência e têm coordenadas, respectivamente, $(-5, 0)$ e $(0, 3)$.



4.1. Determine o raio r da circunferência.

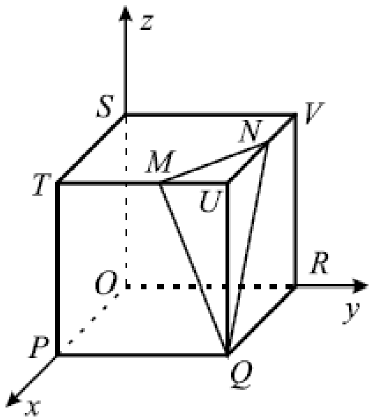
4.2. Sejam (a, b) as coordenadas do ponto C.

Sabendo que $a = b$:

4.2.1. Escreva uma equação da circunferência.

4.2.2. Indique, em $\mathbb{R}$, uma condição para a área a sombreado.

5. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUV]$ de aresta 5



O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial.

O vértice P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

O ponto N tem coordenadas $(2,5,5)$

O triângulo escaleno $[MNQ]$ é a secção produzida no cubo por um plano.

O triângulo $[MNU]$ é isósceles.

5.1. Usando os pontos T, M, N e R, indique, se possível:

5.1.1. Uma recta estritamente paralela ao plano TUQ.

5.1.2. Uma recta não complanar com a recta TP.

5.1.3. Um plano secante e não perpendicular ao plano ORQ.

5.2. Suponha que $\overline{OM} = \sqrt{59}$

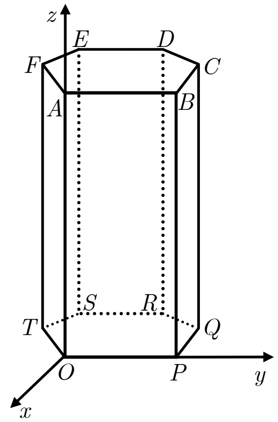
5.2.1. Considere o trajecto mais curto de R a M que passa pela aresta $[UQ]$. Determine o comprimento desse trajecto.

5.2.2. Calcule um valor aproximado às centésimas para o perímetro do triângulo $[MNQ]$.

5.3. Seja k a ordenada do ponto M. Sabendo que a razão entre os volumes do cubo e da pirâmide $[MNQU]$ é igual a 15, determine k.

(Teste intermédio do 11.º ano de Janeiro de 2008 – adaptação)

6. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular $[ABCDEFOPQRST]$ de aresta 3. Sabe-se que:



- A base inferior do prisma está contida no plano xOy;
- A base superior do prisma está contida no plano de equação $z = 8$;
- O eixo Oy contém a aresta $[OP]$;
- O eixo Oz contém a aresta $[OA]$.

6.1. Justifique que as coordenadas do ponto Q são $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$

6.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta BC com o plano xOz

6.3. O triângulo $[TPQ]$ é recto no ponto P? Justifique a resposta.

6.4. Escreva uma equação do plano mediador do segmento $[BR]$

6.5. Escreva uma condição para a face $[ABPO]$

6.6. Escreva uma condição para a esfera assente na base inferior do prisma e tangente às faces laterais.

6.7. Indique as coordenadas de um vector colinear a $\overrightarrow{RB}$, com norma igual a $2\sqrt{273}$ e com coordenadas não positivas.

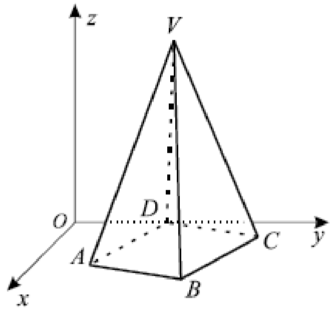
6.8. Determine k, caso exista, de modo que o vector $\vec{u}(\sqrt{3}k, 0, k^2 - 1)$ seja colinear com $\overrightarrow{RB}$

6.9. Determine as coordenadas de um ponto Y sabendo que $\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{OQ}$

6.10. Considere uma pirâmide cuja base coincide com a base inferior do prisma da figura. Admita que X é o vértice superior da pirâmide. Determine as coordenadas de X sabendo que o volume da pirâmide é igual a $12\sqrt{3}$

7. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ cuja base está contida no plano xOy Sabe-se que:

- o ponto D pertence ao eixo Oy
- o ponto A tem coordenadas $(3,2,0)$
- o ponto C tem coordenadas $(1,6,0)$
- o ponto V pertence ao plano de equação $z=6$



7.1. Determine o volume da pirâmide.

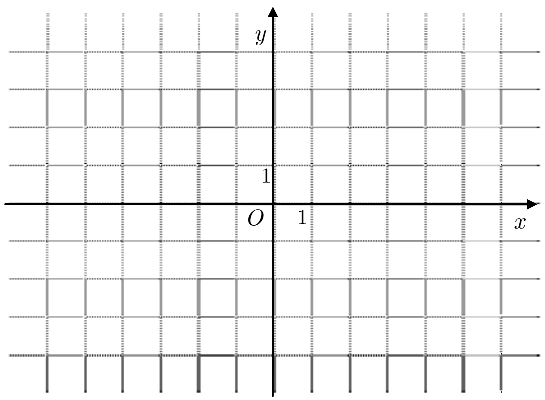
7.2. Determine as coordenadas do ponto V

7.3. Considere o ponto P de cota igual a -5. Escreva a equação da superfície esférica de centro em P e que contém os vértices da base da pirâmide.

(Teste intermédio do 11.º ano de Janeiro de 2010 – adaptação)

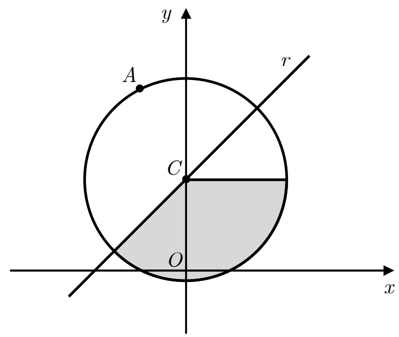
8. No referencial xOy abaixo, **represente**, a lápis, o conjunto de pontos definidos pela seguinte condição:

$$(x-1)^2+(y+1)^2 \geq 1 \wedge (x-1)^2+(y+2)^2 \leq 4 \wedge y \leq x-1$$



9. Na figura ao lado está representado um referencial o.n. xOy. Sabe-se que:

- A equação da circunferência é $x^2+(y-2)^2=5$
- O ponto A pertence à circunferência, tem abcissa -1 e ordenada superior a 2
- A recta r é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e passa no ponto C, centro da circunferência



9.1. Escreva reduzida da equação da recta r

9.2. Indique as coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência com o eixo das abcissas.

9.3. Indique as coordenadas do ponto A', simétrico do ponto A em relação ao eixo das abcissas.

9.4. Mostre que a equação da mediatriz do segmento $[AC]$ é $y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{4}$

9.5. Indique as coordenadas do ponto de intersecção entre a recta r e a mediatriz do segmento $[AC]$

9.6. Escreva a equação vectorial de uma recta que passa no ponto $B(5,3)$ e é paralela à mediatriz do segmento $[AC]$

9.7. Defina uma condição, em $\mathbb{R}$, para a zona a sombreado.