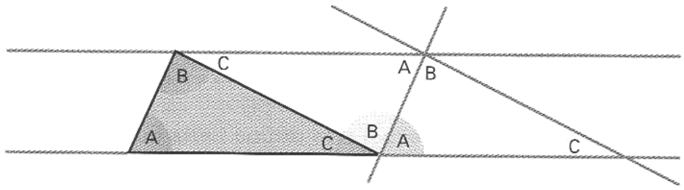
Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

Matemática A e B – 10.º ano

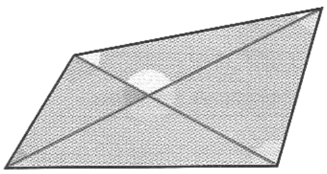
# MÓDULO INICIAL – relatório de uma investigação

***Investiga qual é a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.***

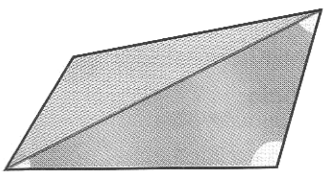
Resolvi começar com o polígono mais simples, o triângulo, polígono em que a soma dos ângulos internos é 180°. Descobri num livro do 7º ano que fazendo a seguinte construção, com rectas paralelas, se pode mostrar que a soma dos ângulos internos é um ângulo raso, ou seja, 180°.




Tentei usar a mesma estratégia para descobrir a soma dos ângulos internos de um quadrilátero mas não consegui.



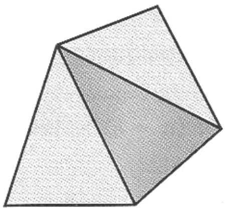
Em seguida, traçando as diagonais, resolvi dividir um quadrilátero em triângulos, mas percebi que a soma dos ângulos internos não podia ser 4 vezes 180° porque, por exemplo, num quadrado a soma é quatro vezes 90° (todos os ângulos internos são rectos), ou seja, 360°. A ideia que tive não resulta porque estou também a somar ângulos (na intersecção das diagonais) que não contam como ângulos internos da figura.

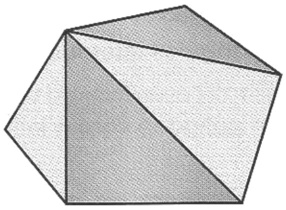


Mas se traçar apenas uma das diagonais, a soma dos ângulos internos dos dois triângulos é igual à soma dos ângulos internos do quadrilátero. Assim, posso concluir que a soma é:

$$2 \times 180° = 360°.$$

E esta estratégia é boa porque posso usá-la também noutros polígonos, por exemplo num pentágono ou num hexágono. Basta, a partir do mesmo vértice, dividir o polígono em triângulos traçando diagonais que não se intersectem, ou seja, divido o polígono no menor número possível de triângulos.





Logo, no caso do pentágono a soma dos ângulos internos é $3 \times 180° = 540°$, e no caso do hexágono é $4 \times 180° = 720°$.

Resolvi então organizar uma tabela com os resultados que obtive até aqui.

| *Polígono* | *Triângulo* | *Quadrado* | *Pentágono* | *Hexágono* |
|---|---|---|---|---|
| *Soma dos ângulos internos* | *180°* | *360°* | *540°* | *720°* |

Percebi que sempre que aumentava um lado ao polígono, aparecia um novo triângulo e a soma dos ângulos internos aumentava 180°. Mas assim, por exemplo, para saber a soma dos ângulos internos de um polígono com vinte lados

(icoságono) precisava de conhecer a soma dos ângulos internos de todos os polígonos anteriores. Resolvi, por isso, organizar a tabela com a informação mais detalhada e tentar descobrir um processo mais simples.

| *Polígono* | *Número de lados* | *Nº de triângulos em que se divide* | *Soma dos ângulos internos* | |
|---|---|---|---|---|
| *Triângulo* | *3* | *1* | *180°* | *180°* |
| *Quadrado* | *4* | *2* | *2 × 180°* | *360°* |
| *Pentágono* | *5* | *3* | *3 × 180°* | *540°* |
| *Hexágono* | *6* | *4* | *4 × 180°* | *720°* |

O número de triângulos em que cada figura se divide é sempre inferior em duas unidades ao número de lados da figura.

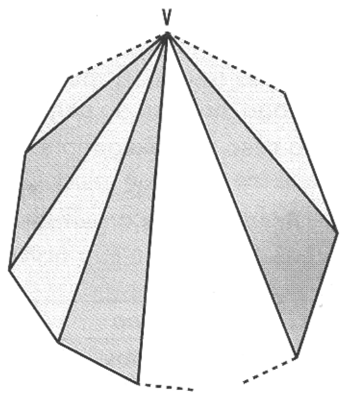
Assim já posso calcular a soma dos ângulos internos de qualquer polígono sem saber o que se passa com os anteriores. Por exemplo:

- Heptágono (sete lados): $(7 - 2) \times 180° = 5 \times 180° = 900°$
- Octógono (oito lados): $(8 - 2) \times 180° = 6 \times 180° = 1080°$
- ...
- Decágono (dez lados): $(10 - 2) \times 180° = 8 \times 180° = 1260°$
- ...
- Icoságono (vinte lados): $(20 - 2) \times 180° = 18 \times 180° = 3240°$
- ...

Usando este raciocínio é possível escrever uma fórmula que me permite obter a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

Para um polígono com **n** lados, a soma é dada por **$(n - 2) \times 180°$**.

Esta ideia poderá ser confirmada geometricamente. Na figura está representado um polígono com **n** lados e, a partir do vértice **V**, tracei diagonais de modo a que o polígono fique dividido no menor número de triângulos possível.




À excepção dos dois lados do polígono que se encontram no vértice **V**, a cada um dos restantes **n − 2** lados do polígono corresponde um triângulo, ou seja, o polígono está dividido em **n − 2** triângulos. Logo a fórmula encontrada é válida para qualquer polígono convexo.

O professor: RobertOliveira
Internet: http://sm.page.vu
http://roliveira.pt.to