ESCOLA SECUNDÁRIA DONA INÊS DE CASTRO

ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA – 12º ANO

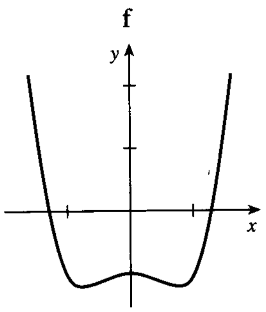
Duração: 90 minutos **7/Fevereiro/2006**

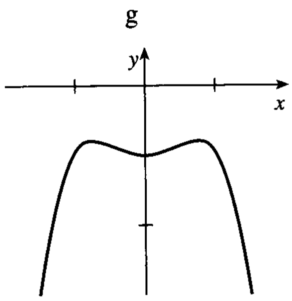
Nome: ______________________________ **N.º** ___ **Turma:** _____

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Para cada questão, escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa correcta.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada.
- Cada resposta certa vale 9 (nove) pontos.
- Cada questão errada, não respondida ou anulada vale 0 (zero) pontos.

1. Em cada uma das figuras está desenhado parte do gráfico de duas funções f e g.





Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $g(x)=|f(x)|$ **(B)** $g(x)=f(-x)-2$

(C) $g(x)=f(|x|)$ **(D)** $g(x)=-f(x)-2$

2. De uma função f, sabe-se que:

- f é par
- $f(0)=3$
- f é estritamente crescente em $[0,+\infty[$

Então podemos afirmar que:

(A) f é decrescente em $]-\infty,0]$.

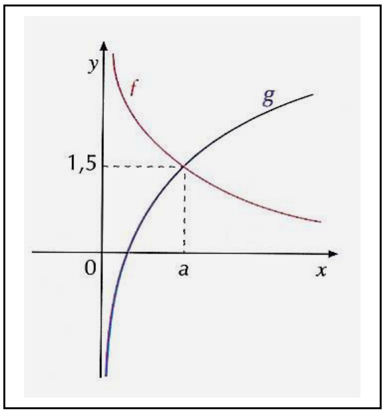
(B) f é injectiva.

(C) f tem apenas um zero.

(D) O contradomínio de f é $[0,+\infty[$.

3. No referencial da figura estão partes das representações gráficas de duas funções f e g, ambas de domínio IR^+, uma decrescente e outra crescente, que se intersectam no ponto de coordenadas $(a;1{,}5)$. Sabe-se que $f(x) = 2 - \ln(x)$.

O conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ é :



(A) $\left]0, e^2\right[$ **(B)** $\left]0, \sqrt{e}\right[$

(C) $\left]0, \frac{e}{2}\right[$ **(D)** $\left]0, \frac{3}{2}\right[$

4. Considere a função f, de domínio IR, definida por $f(x) = 4^{-x}$.
Indica qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de f.

(A) $(-\log_2 3\,;\, 3)$ **(B)** $(-\log_2 3\,;\, 9)$

(C) $(-\log_2 3\,;\, \frac{1}{9})$ **(D)** $(-\log_2 3\,;\, -3)$

5. Simplificando a expressão $\left(\frac{1}{a}\right)^{\log_a(2a)}$ obtém-se:

(A) $-2a$ **(B)** $\frac{a}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2a}$ **(D)** $\frac{2}{a}$

6. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma mesma experiência aleatória.
Sabe-se que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}7$ e $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}2$. Então, podemos concluir que os acontecimentos A e B são:

(A) independentes **(B)** incompatíveis e não contrários
(C) contrários **(D)** compatíveis

7. Se o Joaquim responder aleatoriamente às sete questões de escolha múltipla deste teste, qual a probabilidade de **errar apenas uma** delas?

(A) $7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)$ **(B)** $7 \times \left(\frac{1}{7}\right)^6$

(C) ${}^7C_6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6$ **(D)** ${}^7C_6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{1}{4}\right)$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. No jogo do “ euro milhões “, cada apostador assinala 5 números de um conjunto de 50 e 2 estrelas de um conjunto de 9 (ver figura ao lado).
Os prémios são fixados em função do número de acertos nos dois tipos de números assinalados, de acordo com a tabela seguinte:

Prémio	Acertos		
	Números		Estrelas
1º	5	+	2
2º	5	+	1
3º	5	+	0
4º	4	+	2
...	...		

Determine a probabilidade de um apostador com uma aposta simples ganhar o 3º prémio, com uma aproximação de 7 casas decimais.

2. Três amigos vão a um restaurante e pedem ao empregado de mesa três pratos diferentes. Este, na hora de servir, esquece-se de quem pediu o quê e decide colocar em frente de cada amigo um prato ao acaso.

2.1. Calcula a probabilidade de todos receberem o prato que efectivamente pediram;

2.2. Seja X a variável aleatória «número de pratos que foram entregues às pessoas que efectivamente os pediram». Construa a distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

3. O tempo t (em minutos) que um determinado corpo demora a atingir a temperatura T (em ºC) é expresso pela função:

$$t = -33\ln\left(\frac{T-25}{50}\right)$$

3.1. Quanto tempo demora o corpo a atingir a temperatura de 50 ºC? (apresente o resultado em minutos e segundos).

3.2. Qual a temperatura inicial do corpo?

4. Uma empresa pretende lançar um novo produto através de publicidade na televisão. Fez um estudo e optou por um canal e um horário que tem cerca de 3 milhões de espectadores, que também são possíveis compradores do referido produto. O modelo matemático para o número N (em milhões) de pessoas que depois de verem o anúncio t dias consecutivos estariam a comprar o produto seria:

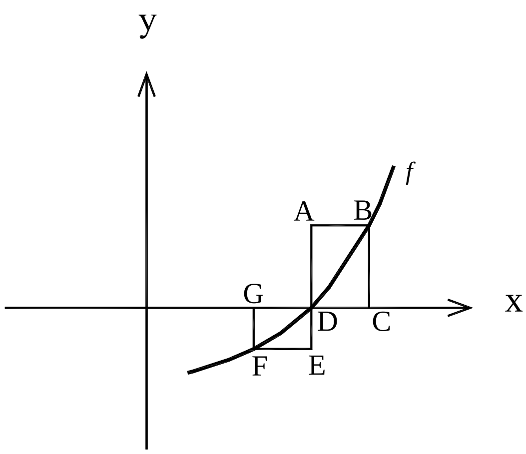
$$N(t) = 3(1 - e^{-0,059t})$$

A empresa depara-se com um problema. Por um lado, pretende lançar o produto por outro tem um orçamento limitado para despesas de publicidade.

O economista da empresa chegou à conclusão que só é possível pagar 10 dias de publicidade e que para a empresa ter rentabilidade com o produto precisa que pelo menos 1,5 milhões de pessoas o comprem.

Perante a situação descrita escreve um pequeno relatório que apresentarias ao director da empresa, usando o gráfico da função obtido pela calculadora gráfica, e onde expliques se é ou não possível e vantajoso usar a estratégia prevista como centro do lançamento do produto.

5. No referencial xOy o.m. da figura está parte do gráfico da função *f*, definida por $f(x) = e^{x-2} - 1$, e dois rectângulos $[ABCD]$ e $[DEFG]$, em que os vértices *B*, *D* e *F* pertencem ao gráfico de *f* e $\overline{GD} = \overline{DC} = a$ cm. A unidade do referencial é o centímetro.



Recorrendo a processos exclusivamente analíticos resolva a três alíneas seguintes.

5.1. Determine as coordenadas do ponto D.

5.2. Mostre que a área do rectângulo $[ABCD]$ é igual a $A_1 = ae^a - a$ e que a área do rectângulo $[DEFG]$ é igual a: $A_2 = -ae^{-a} + a$.

5.3. Determine o valor exacto de a, de modo que a área do rectângulo $[ABCD]$ seja o dobro da área do rectângulo $[DEFG]$.

FIM

Cotações:

1ª Parte: Total 63 pontos

2ª Parte:

1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.1.	5.2.	5.3.	Total
15	15	20	12	15	15	15	15	15	137

BOM TRABALHO!