

## EPÍLOGO

Como vimos nos capítulos precedentes, apesar dos géometras se terem debruçado, durante um longo período de tempo (cerca de dois mil anos), sobre os problemas da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo, não conseguiram encontrar uma solução apenas com o uso da régua não graduada e do compasso, ou seja, através de métodos que designavam por planos e que só faziam apelo a rectas e círculos. A diversidade das construções que envolvem outras curvas atesta não só a curiosidade e o interesse pela questão, mas também a consciência que os géometras gregos tinham da sua dificuldade. Contudo, não é certamente fácil de avaliar até que ponto era generalizada, na Antiguidade, a suspeita de que estes problemas não tinham solução de acordo com as regras da geometria plana.

A impossibilidade de existência de uma tal solução, no âmbito da geometria euclidiana, foi abordada por René Descartes (1556-1650) em 1637, na sua obra *A Geometria*, e talvez se possa dizer que nasceu aqui o germe da prova dessa impossibilidade.

“Foi então a geometria analítica (obra do século XVII) que permitiu estabelecer a ligação entre as figuras e os números e que possibilitou a tradução das operações com régua e compasso da geometria nas operações fundamentais da aritmética mais extracção de raiz quadrada. Num dos sentidos, esta tradução passou pela criação duma *álgebra de segmentos* e podemos até ver a linguagem em que Descartes tratou o problema no livro primeiro de *A Geometria* de 1637.” ([Vi], pp. 99-100).

De facto, sob o título, escrito na margem, de “Como o cálculo da Aritmética se relaciona com as operações da Geometria”, Descartes diz:

“Todos os Problemas de Geometria se podem facilmente reduzir a tais termos que, de seguida, é apenas preciso conhecer o comprimento de algumas linhas rectas para os construir.

E [tal] como a Aritmética é apenas composta de quatro ou cinco operações, que são: a Adição, a Subtracção, a Multiplicação, a Divisão, & a Extracção de raízes, que se pode tomar como uma espécie de divisão; assim [também] não há outra coisa a fazer em Geometria, no que respeita às linhas procuradas, para as preparar para serem conhecidas, do que juntar-lhe outras, ou retirar-lhas; ou então, tendo uma a que chamarei a unidade para melhor a relacionar com os números, & que pode usualmente ser tomada à discrição, e tendo ainda duas outras, encontrar uma quarta que esteja para uma destas duas como a outra está para a unidade, o que é o mesmo que a Multiplicação; ou então encontrar uma quarta que esteja para uma destas duas como a unidade está para a outra, o que é o mesmo que a Divisão; ou enfim encontrar um ou dois ou vários meios proporcionais entre a unidade & qualquer outra linha, o que é o mesmo que tirar a raiz quadrada ou cúbica etc.. E não hesitarei em introduzir estes termos de Aritmética na Geometria, a fim de a tornar mais inteligível.” ([De]; em [SL], p.2, p.5).

No entanto, a impossibilidade de resolução dos problemas geométricos só foi completamente esclarecida no final do século XIX, depois dos trabalhos de Abel (1802-1829) e Gauss<sup>77</sup> (1777-1855) sobre a resolução de equações algébricas por meio de radicais. A prova da impossibilidade dos problemas já referidos depende da teoria das equações cúbicas, isto é, de conceitos algébricos que foram sendo desenvolvidos ao longo de vários séculos. A primeira demonstração, efectiva, da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo<sup>78</sup> foi apresentada por Pierre Laurent Wantzel no artigo “Recherches sur les Moyens de Reconnaître si un Problème de Géométrie Peut se Résoudre avec la Règle et le Compas”, publicado em 1837 no *Journal de Liouville*<sup>79</sup>. ([Te1], p. 385; [Ca], p. 3, p. 5).

Na parte final do livro *Teoria de Galois*, da autoria de Owen J. Brison, podemos encontrar uma prova da impossibilidade dos três problemas clássicos da geometria grega (cf. [Br], p. 119). De acordo com a Teoria de Galois, *os números construíveis são números algébricos*<sup>80</sup> cujo grau é uma potência de 2. Assim,  $\sqrt{2}$  é um número construível porque tem grau 2, enquanto que  $\sqrt[3]{2}$  não é construível por ter grau 3. O conjunto dos números reais construíveis é um corpo que contém todos os racionais. Tendo em conta que este trabalho se insere na área da História da Matemática, vamos “provar” a impossibilidade destes problemas, da forma menos algébrica e, se possível, mais geométrica. A “prova” estará enquadrada nos capítulos precedentes, sem, no entanto, descurar os resultados da álgebra que a suportam. Um entendimento profundo da impossibilidade destes dois problemas da geometria grega, fundamenta-se por traduzir os problemas geométricos na linguagem da álgebra. E, como afirmou Franco de Oliveira, numa conferência no Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências na Universidade do Porto: «Estudamos álgebra para podermos compreender a prova da impossibilidade de resolução dos três problemas clássicos da geometria grega».

---

<sup>77</sup> Em 1796 Gauss mostrou que era possível inscrever, usando apenas régua não graduada e compasso, um polígono regular de 17 lados numa circunferência. Enunciou, então, uma condição necessária e suficiente para que um polígono regular de  $n$  lados fosse construível.

<sup>78</sup> Os dois problemas em causa requerem a construção de raízes cúbicas, enquanto que a quadratura do círculo requer a construção de  $\pi$ . Em 1837 Ferdinand Lindemann (1852-1939) demonstra que  $\pi$  é um número transcendente, isto é, não é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. Este resultado, juntamente com os trabalhos de Wantzel, permitiu concluir a impossibilidade da quadratura do círculo.

<sup>79</sup> *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2, pp. 366-372. Em 1836 Liouville fundou um jornal de matemática chamado *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, muitas vezes denominado *Journal de Liouville*.

<sup>80</sup> Um número real diz-se um *número algébrico* se for raiz de uma equação polinomial da forma  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , com  $n \in \mathbb{N}_0$ , e cujos coeficientes são números inteiros não simultaneamente todos nulos. O menor  $n$  nestas condições diz-se o *grau* do número algébrico.

A seguir, exploraremos um pouco melhor a relação existente entre os dois problemas geométricos em causa — duplicação do cubo e trissecção do ângulo — e as equações algébricas envolvidas. E, como afirmam John Conway e Richard Guy ([CG], p. 192):

“A maior parte dos números que surgem nos problemas geométricos são números algébricos. Porquê isto? O Teorema de Pitágoras mostra a existência das raízes quadradas. (...) para encontrar o ponto de intersecção de duas rectas basta resolver duas *equações lineares*; os *dois* pontos onde duas circunferências se intersectam, ou onde uma circunferência intersecta uma linha recta, são obtidos pela resolução de uma equação *quadrática*.

Trabalhando na direcção contrária, podemos ver que qualquer número que seja raiz de uma equação quadrática pode ser obtido geometricamente.”

Vejamos o seguinte resultado que clarifica a questão acima abordada.

***Lema:*** *Um problema geométrico que seja resolúvel usando apenas régua não graduada e compasso é equivalente a um problema com números, envolvendo apenas as quatro operações fundamentais e a extracção da raiz quadrada.*

*Demonstração:*

Consideremos um problema geométrico que seja resolúvel usando apenas régua não graduada e compasso.

Suponhamos que o problema tem solução. Então pelo menos dois pontos do plano são construíveis com régua não graduada e compasso; e se dois pontos são construíveis podemos construir a recta  $r$  que os une (*Elementos* I, postulado 1). Sendo assim, é possível construir uma recta perpendicular à recta  $r$  (*Elementos* I, 11). Se considerarmos uma medida de comprimento, escolhida para unidade, podemos definir um referencial ortonormado (a que por conveniência chamaremos referencial XOY). Um ponto qualquer desse referencial identifica-se por um par ordenado de números  $(x, y)$ , que se designam por coordenadas desse ponto; neste contexto vamos assumir que as coordenadas são números racionais.

Se o problema geométrico é resolúvel com régua não graduada e compasso, então todos os novos elementos geométricos são obtidos através de um número finito de passos, entre os seguintes:

- a) dados dois pontos, desenhar a recta que os une (*Elementos* I, postulados 1 e 2);
- b) desenhar uma circunferência dado um ponto como centro e passando por outro ponto (*Elementos* I, postulado 3);
- c) desenhar o(s) ponto(s) de intersecção de duas rectas, de uma recta com uma circunferência ou de duas circunferências.

A operação da alínea a) corresponde a, partindo das coordenadas dos dois pontos, considerar a equação da recta que os une. Dados os pontos  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ , então a equação da recta que os une é

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0.$$

Ou seja,

$$ax + by + c = 0,$$

onde,

$$a = y_2 - y_1; b = x_1 - x_2 \text{ e } c = x_2y_1 - x_1y_2.$$

Mas  $x_1, y_1, x_2$  e  $y_2$  são números racionais e como o conjunto dos números racionais é um conjunto fechado relativamente às quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão), os números procurados  $a, b$ , e  $c$  podem obter-se usando só as quatro operações elementares.

Para a operação da alínea b) consideremos a circunferência de centro no ponto  $A(\alpha, \beta)$  e raio  $\rho$ . A sua equação é

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

onde,

$$a = -2\alpha; b = -2\beta; \text{ e } c = \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2.$$

Como  $\alpha, \beta$  e  $\rho$  são números racionais, mais uma vez os números procurados  $a, b$ , e  $c$  obtêm-se usando apenas as quatro operações algébricas elementares.

Relativamente às operações da alínea c) para encontrar as coordenadas do ponto de intersecção (caso exista) de duas rectas, elas envolvem apenas operações racionais sobre os coeficientes das equações em causa; enquanto que encontrar o(s) ponto(s) de intersecção de uma recta com uma circunferência ou de duas rectas poderá envolver, além das quatro operações elementares já referidas, a extracção da raiz quadrada.

Podemos, assim, concluir que um problema geométrico que seja resolúvel apenas com régua não graduada e compasso, traduz-se num problema numérico envolvendo apenas as quatro operações fundamentais e a extracção da raiz quadrada.

Consideremos agora um problema numérico que seja resolúvel apenas com as quatro operações fundamentais mais a extracção da raiz quadrada; vamos, a seguir, provar que também é resolúvel com a utilização, apenas, da régua não graduada e do compasso.

Sejam dois segmentos de recta que têm como medida de comprimento respectivamente os números  $a$  e  $b$ , dada uma *unidade* de comprimento previamente escolhida. Se conseguirmos construir um segmento que (nessa mesma unidade) tenha como medida de

comprimento a soma, a diferença, o produto e o quociente desses dois números  $a$  e  $b$ , e um segmento que tenha como medida de comprimento a raiz quadrada da medida de comprimento do segmento escolhido, então fundamentamos o nosso propósito.

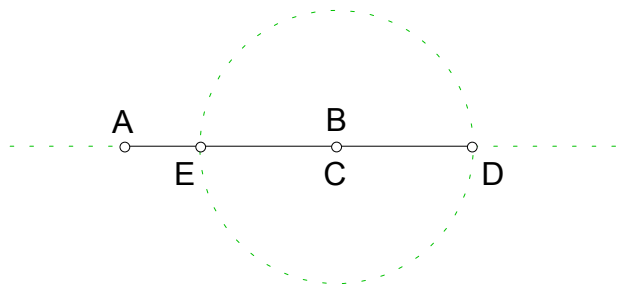
Consideremos a seguinte unidade de comprimento  $\text{---}| \text{---}|$  ;

e os segmentos  $\overset{A}{\text{---}| \text{---}| \text{---}| \text{---}|} \overset{B}{\text{---}| \text{---}|}$  e  $\overset{C}{\text{---}| \text{---}|} \overset{D}{\text{---}| \text{---}|}$ .

Construir os segmentos de medidas de comprimento  $AB+CD$ ,  $AB-CD$ ,  $AB \cdot CD$ ,  $AB/CD$  e  $\sqrt{AB}$  é um processo simples e de justificação directa, no campo da geometria elementar, como se ilustra a seguir:

i)  $AB+CD$

Tracemos uma linha recta e nela construamos – por *Elementos* I, 2 – um segmento congruente com  $AB$ . Pretendemos construir, sobre a mesma recta, um segmento congruente com o segmento  $CD$  e de modo a que  $B$  coincida com  $C$ . Construamos uma circunferência com centro em  $B$  e raio  $CD$ , que vai intersectar a recta nos pontos  $D$  e  $E$ . Um destes dois pontos, digamos  $D$ , é tal que  $B$  está entre  $A$  e  $D$ . Portanto, está construído, apenas com régua não graduada e compasso, o segmento  $AD$ , ou seja,  $AB+CD$ .

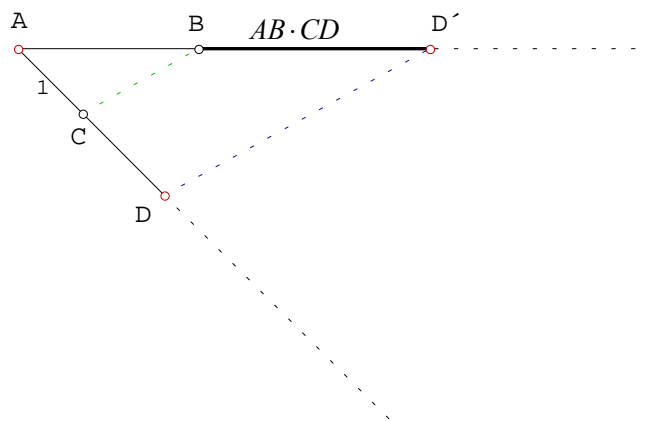


ii)  $AB-CD$

A construção do segmento  $AB-CD$  é análoga à anterior, no entanto, teremos que considerar obrigatoriamente que o segmento  $AB$  é maior do que o segmento  $CD$ , caso contrário não é possível efectuar a subtracção dos dois segmentos. Uma vez que  $AB$  é maior do que  $CD$ , um destes pontos, digamos  $E$ , pertence ao segmento de recta  $AB$ . Como  $E$  está entre  $A$  e  $B$  está construído, apenas com régua não graduada e compasso, o segmento  $AE$ , ou seja,  $AB-CD$ .

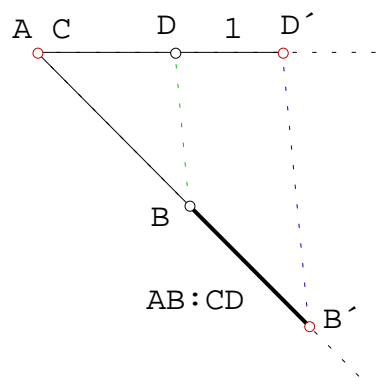
iii)  $AB \cdot CD$

Sobre uma linha recta marquemos o segmento de comprimento  $AB$ . A partir de  $A$  construíamos uma semi-recta onde marcamos a *unidade* e, seguidamente, o segmento de comprimento  $CD$ . Unamos o ponto  $C$  com o ponto  $B$  (segmento verde na figura seguinte). Construíamos uma paralela a este segmento passando por  $D$  (a azul na figura); assim construímos o segmento de comprimento  $AB \cdot CD$ . A justificação deste facto deve-se à aplicação directa de *Elementos* VI, 2 ao triângulo cujos vértices são os pontos assinalados a vermelho<sup>81</sup>.



iv)  $AB/CD$

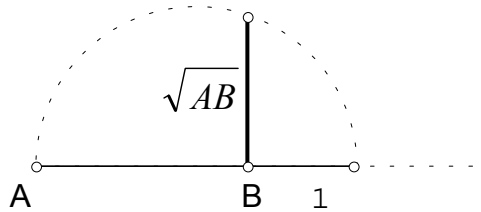
Construíamos o segmento  $AB/CD$ , de modo análogo ao caso anterior, como ilustra a figura:



<sup>81</sup> Repare-se que a construção do segmento  $AB \cdot CD$ , não é mais do que a construção do quarto proporcional dos segmentos de recta: *unidade*,  $AB$  e  $CD$  — *Elementos* VI,12.

v)  $\sqrt{AB}$

Quanto à construção de um segmento cuja medida de comprimento seja  $\sqrt{AB}$ , basta ter em atenção o esquema exemplificado na figura seguinte<sup>82</sup>.



■

Como refere Maria Teresa Viegas ([Vi], p. 100):

“Deste modo, o problema das construções com régua e compasso passou a poder ser visto a uma luz muito diferente. Com efeito, averiguar o que é possível construir apenas com estes instrumentos, no mundo das figuras, traduz-se agora em saber o que se pode obter apenas com as operações fundamentais mais extracção de raiz quadrada, no mundo dos números. Ora, este ponto de vista era completamente inacessível aos gregos, dado o divórcio que a crise dos incomensuráveis tinha provocado entre geometria e aritmética. A geometria analítica, unindo estas de novo, veio permitir que a geometria pudesse usufruir das poderosas técnicas algébricas entretanto desenvolvidas na aritmética e que os números passassem a contar com a preciosa intuição visual fornecida por um desenho.

Tornou-se assim natural que a solução de muitos problemas enunciados em termos de régua e compasso viessem a ser resolvidos com recurso à álgebra. E também faz sentido a grande distância no tempo entre o pôr de alguns desses problemas (na Antiguidade) e o indicar da respectiva solução (no século XIX). Não só foi preciso que a geometria analítica traduzisse os problemas noutra linguagem, como também encontrar técnicas adequadas para os resolver na sua nova formulação.”

Continuemos, então, com a apresentação de resultados que conduzem à prova da impossibilidade da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo.

**Definição:** *A raiz de uma equação diz-se uma raiz construível com régua não graduada e compasso, ou simplesmente raiz construível, se possuir a seguinte propriedade: dada uma unidade de comprimento (um segmento unitário), podermos construir, com régua não graduada e compasso, um segmento de recta de medida de comprimento igual à raiz.*

■

<sup>82</sup> Trata-se da construção do meio proporcional entre os segmentos de recta: *unidade* e *AB* — *Elementos* VI, 13.

Quando nos referimos ao facto de poder construir, com régua não graduada e compasso, um segmento de recta de medida de comprimento igual à raiz em causa, estamos a dizer que pretendemos desenhar esse segmento com um número finito de operações entre as seguintes: dados dois pontos, desenhar a recta que os une; desenhar uma circunferência em torno de um ponto e passando por outro ponto; desenhar os pontos de intersecção de duas rectas, duma recta e duma circunferência ou de duas circunferências.

***Teorema da Raiz-Construível:*** *Uma equação cúbica de coeficientes inteiros que não tenha raízes racionais também não tem raízes construíveis.*

A prova deste teorema está fora do âmbito deste trabalho; no entanto, podem ser encontradas provas em vários textos, como por exemplo em ([Ma], p. 42-43).

***Teorema da Raiz-Racional:*** *Seja  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Qualquer raiz racional desta equação pode ser escrita na forma  $p/q$ , onde  $p$  é um factor de  $a_0$  e  $q$  é um factor de  $a_n$ .*

*Demonstração :*

Consideremos que  $p/q$  é uma raiz racional da equação, onde  $q \neq 0$  e  $\text{mdc}(p,q)=1$ . Substituindo, na equação,  $x$  por esta solução e multiplicando por  $q^n$  obtemos,

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Uma vez que  $p$  divide o segundo membro da equação, também divide o primeiro membro. Mas como  $p$  divide todos os termos do primeiro membro, com a excepção, talvez apenas, do último, terá obrigatoriamente também de dividir o último. Tendo em atenção que  $\text{mdc}(p,q)=1$ , obtém-se que  $p$  divide  $a_0$ , ou seja,  $p$  é um factor de  $a_0$ .

Por outro lado, visto que  $q$  divide o segundo membro da equação, também divide o primeiro membro. Mas como  $q$  divide todos os termos do primeiro membro, com a excepção, talvez apenas, do primeiro, terá obrigatoriamente também de dividir o primeiro. Dado que  $\text{mdc}(p,q)=1$ , então  $q$  divide  $a_n$ , isto é,  $q$  é um factor de  $a_n$ .

■

Seguidamente, veremos o que está em causa na demonstração da impossibilidade da resolução do problema da duplicação do cubo. Consideremos um cubo de aresta  $a=1$  (cujo volume é  $1^3$ ), o qual pretendemos duplicar, o que significa que, pretendemos encontrar a solução da equação  $x^3 = 2 \cdot 1^3$ , ou seja, construir um segmento  $x$  cuja medida de comprimento seja  $\sqrt[3]{2}$ .

Estamos perante a seguinte equação polinomial

$$x^3 - 2 = 0. \quad (1)$$

Para mostrar que a duplicação do cubo é impossível de efectuar com régua não graduada e compasso, vamos ver que a equação (1) não tem raízes construíveis; caso contrário, uma das soluções encontradas seria a medida de comprimento da aresta do cubo procurado (de volume 2), portanto seria construível com régua não graduada e compasso.

Pelo Teorema da Raiz-Racional, as possíveis raízes racionais para a equação (1) são:

$$-1, +1, -2 \text{ e } +2.$$

Dado que nenhum destes valores satisfaz a equação (1), podemos afirmar que a equação não tem raízes racionais e, pelo Teorema da Raiz-Construível podemos concluir que a equação (1) não tem raízes construíveis. Logo  $\sqrt[3]{2}$  (medida de comprimento da aresta do cubo procurado) não é um número construível com régua não graduada e compasso.

Concluimos, então, que não é possível duplicar, com régua não graduada e compasso, o cubo de aresta  $1$ ; então podemos afirmar que não é possível duplicar um qualquer cubo.

Seguidamente, vamos debruçar-nos sobre a impossibilidade do problema da trissecção do ângulo. Isto é, dado um qualquer ângulo, pretendemos construir, com régua não graduada e compasso, um ângulo cuja amplitude seja a terça parte da amplitude do ângulo dado. Obviamente que, para provar que a trissecção de um qualquer ângulo é impossível, basta encontrar<sup>83</sup> um ângulo que seja impossível de trissectar. No entanto, já vimos que é possível efectuar a trissecção de determinados ângulos, como é o caso do ângulo recto.

Como vimos no capítulo 1, uma possível abordagem para o problema da trissecção do ângulo é reduzi-lo a um problema de nêusis (cf. secção 1.2, pp. 17-19), o qual pode ser resolvido de várias maneiras, sendo exemplos de resolução a apresentada por Nicomedes através da concóide (cf. secção 1.5, pp. 33-36) e por Papo pelo uso da hipérbole (cf. secção 1.6.1, pp. 39-40).

---

<sup>83</sup> Vamos ter por base o interessante esquema apresentado na obra *The Historical Roots of Elementary Mathematics* ([ BJB], pp. 118-120).



$$\frac{x}{2a} = \frac{b}{y} = \frac{y+3a}{2x}. \quad (3)$$

Recorde-se que o ponto  $A$  é um ponto qualquer de um dos lados do ângulo  $ABC$ , o que significa que, sem perda de generalidade, podemos tomar  $AB = 1$ , ou seja,  $a = 1$ . Assim a relação (3) toma a forma

$$\frac{x}{2} = \frac{b}{y} = \frac{y+3}{2x},$$

donde se obtém  $xy = 2b$  e  $x^2 = y + 3$ .

Finalmente, obtemos a equação seguinte que designaremos por *equação da trissecção*:

$$x^3 - 3x - 2b = 0. \quad (4)$$

Quer isto dizer que trissectar o ângulo  $ABC$  é procurar  $x$  que satisfaça a equação anterior. Encontrado  $x$ , será possível localizar o ponto  $E$  e trissectar o ângulo em causa através da recta  $BD$ . Portanto, só falta agora averiguar se a equação da trissecção tem raízes construíveis.

Note-se que, na equação da trissecção, existe um parâmetro representado por  $b$ . Vejamos que a existência de raízes construíveis nesta equação depende do parâmetro  $b$ . Consideremos o parâmetro  $b = 0$ . Assim, a equação é dada por

$$x^3 - 3x = 0,$$

cujas raízes são  $0$ ,  $-\sqrt{3}$  e  $\sqrt{3}$ .

Como estas raízes são construíveis, em particular  $\sqrt{3}$ , então é possível trissectar um ângulo, com régua não graduada e compasso, quando  $b=0$ . A que corresponde este caso? Se atendermos à figura anterior, facilmente descobrimos que é o caso do ângulo recto que, como já vimos, é possível trissectar com os instrumentos euclidianos (cf. secção 1.1, p. 13).

Consideremos agora o caso de  $b = \frac{1}{2}$ , o que corresponde a trissectar um ângulo de  $60^\circ$ .

Tendo presente o triângulo rectângulo  $ABF$ , facilmente se prova que a amplitude do ângulo  $ABC$  é de  $60^\circ$ . Neste caso a equação da trissecção é:

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \quad (5)$$

Pelo Teorema da Raiz-Racional, as possíveis raízes racionais para a equação anterior são:

$$-1 \text{ e } +1.$$

Visto que nenhum destes valores satisfaz a equação (5), podemos afirmar que a equação não tem raízes racionais. E, pelo Teorema da Raiz-Construível, concluímos que a equação não tem raízes construíveis. Isto significa que não podemos construir, com régua não graduada e compasso, o segmento de recta  $AE$ . Acabámos de provar que não é possível trissectar o ângulo de amplitude  $60^\circ$ , com os instrumentos euclidianos; então, podemos afirmar que não é possível trissectar um qualquer ângulo.

Longo foi o caminho percorrido pelos matemáticos ao tentarem resolver estes dois famosos problemas da Antiguidade; caminhos que conduziram a conceitos modernos de álgebra. Os géometras gregos falharam nas suas buscas porque procuravam algo de impossível, como o próprio Pappo referiu ([P]; em [Ver3], I, pp. 206-210), procuravam resolver problemas sólidos por meios planos.

A busca de solução para estes, e outros, problemas geométricos permitiu, ao longo destes dois mil anos, que inesperados e interessantes desenvolvimentos matemáticos surgissem e novos horizontes se abrissem no universo da álgebra. Problemas de enunciados muito simples levaram à criação de ramos da matemática muito complexos.