INTRODUÇÃO

> "Os jogos antigos são os melhores jogos. Um dos mais antigos são as construções geométricas. Como Platão especificou, o jogo é executado com uma régua e um compasso, onde a régua é apenas usada para desenhar a recta que passa por dois pontos dados e o compasso é usado unicamente para desenhar um círculo de centro dado e que passa por um determinado ponto." ([Ma], p. 9).

Porque será possível bissectar um ângulo mas, geralmente, não o podemos trissectar? Porque se pode duplicar um quadrado, mas não um cubo? Será que estes factos dependem unicamente das regras estabelecidas ou será que dependem dos conhecimentos existentes em geometria?

Esta dissertação aborda dois problemas clássicos da geometria antiga: a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. As soluções aqui estudadas envolvem construções geométricas que, embora não sejam da matemática elementar, fazem apelo a métodos geométricos simples. Estes assuntos poderão ter interesse pedagógico na formação de professores, proporcionando a introdução de novos conceitos, tais como o estudo das cónicas e outras curvas potencialmente úteis na vertente didáctica.

Pensa-se que a matemática dos antigos gregos nasceu do contacto deste povo com o Oriente e, em particular, com o Egipto, onde os sábios mais eminentes da Grécia foram ampliar as suas ideias e o seu saber. Os primeiros quatro séculos do período helénico (compreendido entre o século VI a.C. e o séc. V d.C.) constituem um período de realizações extraordinárias da matemática grega.

"(...) as matemáticas produziram neste período [pré-euclidiano], em íntima colaboração com a filosofia, o seu próprio progresso (...)." ([V], p. 234).

Foi neste período que se iniciou o estudo de três problemas geométricos que desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais, durante mais de dois mil anos. Durante séculos diversas soluções foram propostas para a resolução destes problemas geométricos mas não estavam de acordo com as regras do jogo, presumivelmente, colocadas na Academia de Platão, onde apenas *construções com régua não graduada e compasso* eram admitidas. Estes problemas ficaram famosos, talvez por serem os primeiros onde surgem grandes dificuldades de resolução, de acordo com as regras inicialmente colocadas. São conhecidos pelos *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*:

- *trissecção do ângulo* — o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais;
- *duplicação do cubo* — o problema de construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;
- *quadratura do círculo* — o problema de construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado.

Os problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo têm vários pontos em comum: ambos podem ser resolvidos através de secções cónicas; quando traduzidos em linguagem algébrica exprimem-se por equações cúbicas; a prova da impossibilidade de solução com régua não graduada e compasso faz uso da mesma abordagem. Nesta dissertação iremos analisar as contribuições de vários matemáticos para a resolução destes dois problemas, ao longo do período helénico[1]. No entanto, refira-se que o problema da quadratura do círculo[2] remonta ao antigo Egipto.

Ao falarmos em construções com régua não graduada e compasso estamos a referir--nos aos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. Estes postulados são a base destas construções, muitas vezes designadas por construções euclidianas. Nos *Elementos* de Euclides não se menciona o compasso ou quaisquer outros instrumentos, Euclides simplesmente assume que linhas rectas podem ser construídas dados dois pontos, e que uma circunferência pode ser construída dado o seu centro e passando por um outro ponto. A régua não tem propriedades métricas e o compasso é de pontas "caídas" (contrariamente ao nosso compasso de pontas fixas[3]) e assim a possibilidade de transposição de comprimentos é, obrigatoriamente, assegurada por *Elementos*[4] I, 2.

---

[1] As tentativas de resolução não se limitaram a este período, basta consultar o apêndice do sétimo volume das *Obras Sobre Matemática* de Gomes Teixeira ([Te1]) para encontrarmos contribuições de outros matemáticos.

[2] O problema da quadratura do círculo está intimamente ligado à história do cálculo do número π. Visto que um círculo de raio r tem de área πr^2, o problema de construir um quadrado com a área igual a um dado círculo, cujo raio seja um segmento unitário, é equivalente à construção de um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ para a aresta do requerido quadrado.

[3] À primeira vista podia supor-se que o «compasso moderno» fosse mais poderoso que o «compasso euclidiano», mas é curioso que este dois instrumentos sejam equivalentes ([Ev], p. 134). O matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) provou que as construções com compasso são tão poderosas como as construções com régua e compasso. Por outro lado, o matemático suíço Jacob Steiner (1796-1863) mostrou que as construções com régua (mas exigindo que no plano de desenho exista um círculo com centro e raio fixos) são tão eficazes como as construções com régua e compasso.

[4] Ao longo de toda a dissertação será usada esta notação quando nos referirmos a proposições dos *Elementos* de Euclides ([Eu]; em [H2]).

A parte mais substancial do percurso efectuado pela matemática grega estava subordinada à geometria, cujo desenvolvimento parece ter sido influenciado pelas investigações feitas para tentar resolver estes três problemas clássicos da geometria grega. O raciocínio matemático dos gregos baseava-se, quase unicamente, nas formas e figuras geométricas. Um segmento de recta representava também o seu próprio comprimento; o produto de dois segmentos de recta representava uma área rectangular; o produto de três segmentos de recta representava um volume paralelepipédico. Isto é, efectuavam as operações aritméticas através das construções geométricas, por exemplo, se x e y representavam dois segmentos, então xy era a área do rectângulo de lados x e y.

Para os geómetras gregos, um problema resolúvel com régua não graduada e compasso era um problema cuja solução passava por construir os elementos desconhecidos, utilizando apenas a régua não graduada e o compasso, a partir dos elementos geométricos conhecidos. O que significa, executar construções que se possam fundamentar nos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. Papo classificou os problemas geométricos em três tipos, atendendo aos meios pelos quais é possível construir uma sua solução. Os que podem ser resolvidos apenas por meio de linhas rectas e circunferências são designados por *planos*, visto que as curvas referidas têm a sua origem num plano; os que envolvem na sua resolução superfícies cónicas, são chamados problemas *sólidos*, porque fazem uso de superfícies de figuras sólidas; os que envolvem, na sua construção, curvas que se obtêm de superfícies menos regulares e de movimentos mais complexos são os *lineares*.

O primeiro capítulo deste texto estuda o problema da trissecção do ângulo e as várias soluções apresentadas pelos matemáticos ao longo do período helénico. A partir de um ângulo arbitrário, os geómetras gregos tinham conhecimento de como construir um ângulo com o dobro, triplo, etc. da amplitude do ângulo dado, isto é, sabiam como construir os múltiplos de um ângulo. O problema surge nos submúltiplos: apesar de ter sido fácil bissectar um ângulo, com o uso exclusivo da régua não graduada e compasso, o mesmo não aconteceu na trissecção de um ângulo arbitrário. Os geómetras gregos reduziram este problema a um outro tipo de problema: um problema de construções por nêusis. Pensa-se que este tipo de construções eram já conhecidas de Hipócrates no séc. V a.C.. Como veremos, algumas das construções apresentadas têm por objectivo resolver esta nêusis, como é o caso da solução de Nicomedes e de uma das soluções apresentadas por Papo. No entanto, Arquimedes apresenta uma solução para uma outra nêusis, fundamentada por um dos resultados da sua obra *Livro dos Lemas*.

O desenvolvimento da matemática na Antiga Grécia deve-se, também, ao aparecimento de curvas, que não a recta e a circunferência, surgidas nas sucessivas tentativas de resolução dos três problemas clássicos da geometria grega. É o caso da curva trissectriz de Hípias, que é descrita por via cinemática e permite reduzir a multissecção de um ângulo agudo à multissecção de um segmento de recta. Assim, ela pode ser usada para dividir um ângulo arbitrário em várias partes iguais e não apenas em três partes. A espiral de Arquimedes é exemplo de uma outra curva que pode ser utilizada para a multissecção de um ângulo, em particular, a trissecção. Arquimedes contribui ainda, embora não directamente, com uma outra solução para a trissecção do ângulo, aliás uma das mais interessantes construções do tipo nêusis.

Nicomedes inventou uma curva, a concóide, com o intuito primordial de trissectar o ângulo, mas contrariamente ao que se passa com a trissectriz de Hípias e a espiral de Arquimedes, a solução de Nicomedes não permite reduzir a multissecção de um ângulo à multissecção de um segmento de recta. Segundo parece, Nicomedes inventou um instrumento para construir a sua curva; no entanto, a concóide de Nicomedes tem um interesse muito mais teórico do que prático, visto que podemos mover uma régua marcada até que uma dada posição seja alcançada e, assim, obtemos a solução de Nicomedes.

O último dos grandes geómetras do período helénico foi Papo de Alexandria; a sua obra *Colecção Matemática* será uma referência ao longo de toda esta dissertação, não só no que diz respeito à trissecção do ângulo mas também à duplicação do cubo. As soluções para a trissecção do ângulo transmitidas por Papo, sem fazer referência aos autores ou às suas fontes, fazem uso de cónicas. Na primeira solução, Papo apresenta uma construção por nêusis, enquanto que a segunda é uma construção directa, sem o recurso a nêusis, onde Papo utiliza uma hipérbole de dois modos distintos.

O segundo capítulo será integralmente dedicado ao problema da duplicação do cubo e às soluções apresentadas pelos matemáticos ao longo do período helénico. Que melhor motivação para estudar história da matemática do que uma lenda? Conta-se que depois de uma época de esplendor político e cultural, a ilha de Delos foi assolada por uma peste que assombrava a Grécia. De modo a combater a peste, o oráculo propôs aos habitantes que fosse construído um altar com o volume duplo daquele que existia em forma cúbica. Supuseram que se duplicassem a aresta do altar teriam o problema resolvido; ficaram espantados quando, efectivamente, obtiveram um altar cujo volume era oito vezes o volume do altar existente, o que constituiu um grande embaraço para os geómetras da época.

Na Antiga Grécia a matemática tinha um valor especulativo, era parte da filosofia e não tinha uma intenção prática. O desígnio dos geómetras gregos na resolução deste problema era chegar à solução por métodos planos, isto é, utilizar somente a régua não graduada e o compasso. O primeiro contributo para a resolução do problema da duplicação do cubo é de Hipócrates de Quios, que reduz este problema a um outro — *a procura de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o seu dobro*. A partir da contribuição de Hipócrates todos os esforços dos matemáticos se voltaram para a procura dos dois meios proporcionais em causa e, possivelmente, a ele se deve o nascimento do tão conhecido método de redução.

Talvez possamos afirmar que os matemáticos e filósofos gregos prepararam os alicerces do edifício geométrico, graças à sua capacidade visual. A solução apresentada por Arquitas é um bom exemplo desta conjectura, pois é uma solução de rara beleza tridimensional, que envolve três superfícies de revolução. Pensa-se que um dos discípulos de Arquitas, Eudoxo de Cnido, apresentou uma solução, possivelmente influenciada pela solução do seu mestre, mas que infelizmente não chegou até nós.

Os matemáticos gregos desenvolveram, largamente, a chamada álgebra geométrica, através de figuras geométricas simples e das respectivas áreas. Menecmo terá sido o primeiro a representar curvas por meio de equações, no entanto de um modo um pouco primitivo. A solução que Menecmo apresenta para encontrar os meios proporcionais, referidos por Hipócrates, faz uso de curvas que se podem obter pela intersecção dum cone de base circular com um plano. Pensa-se que foram as investigações efectuadas por Menecmo, para solucionar o problema em estudo, que o levaram à descoberta das secções cónicas.

Platão criticava todas as construções que não fizessem uso exclusivo de raciocínios geométricos, por estas desvirtuarem a beleza e a pureza da geometria. No entanto, é a ele atribuída, talvez incorrectamente, uma solução para o problema da duplicação do cubo através de um engenho mecânico — o esquadro de Platão — que faz uso de uma determinada configuração de triângulos rectângulos. Mas esta não é a única solução conhecida através de engenhos mecânicos; Eratóstenes de Cirene construiu um engenho, com o intuito de resolver este problema, do qual muito se orgulhava. Esse engenho, conhecido pelo nome de mesolabo, tem como base uma configuração de triângulos semelhantes que deslizam sobrepondo-se, permitindo construir os dois segmentos em proporção contínua entre a aresta do cubo dado e o seu dobro.

Os problemas clássicos da geometria grega originaram um pretexto para estudar curvas mais complexas que a recta e a circunferência. Além das cónicas, já anteriormente referidas, outra curva — a concóide de Nicomedes — aparece associada ao problema da duplicação do cubo, ou seja, ao problema dos dois meios proporcionais. Esta curva, exposta por Nicomedes na sua obra *Sobre as Linhas Concóides*, é utilizada na duplicação do cubo e, como já referimos, na trissecção do ângulo.

Uma outra solução por meio de uma curva, legada pelos gregos, faz uso da cissóide de Diocles. A solução apresentada por este matemático parece ter influenciado outras soluções, nomeadamente, as soluções de Esporo e Papo. Estas soluções serão apresentadas simultaneamente, tendo em atenção que são, no essencial, a de Diocles; mas ao invés de usarem a curva cissóide, usam a manipulação de uma régua que deverá atingir uma posição pretendida.

A principal fonte para o nosso conhecimento dos desenvolvimentos do problema da duplicação do cubo é o legado de Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*. As soluções de Apolónio, Herão e Filão serão também apresentadas em simultâneo, tendo em atenção que têm, em termos teóricos, o mesmo objectivo: a determinação de dois pontos numa posição desejada.

Como já referimos, todas as construções apresentadas após o trabalho de Hipócrates têm por objectivo encontrar os dois meios proporcionais a que Hipócrates se refere. Na procura das soluções para os problemas geométricos, os geómetras gregos desenvolveram uma técnica especial chamada "análise"; supunham o problema resolvido e depois investigavam as propriedades e o processo utilizado nessa solução, raciocinando em sentido inverso. A solução de Menecmo para o problema da duplicação do cubo, relatada por Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro* (cf. [E]; em [ver2], II, pp. 603-605), é um exemplo dessa "análise".

Nos *Elementos* de Euclides podemos encontrar vários problemas de construções geométricas, cujas soluções podem ser obtidas com o uso exclusivo da régua não graduada e do compasso. Não é o caso dos três problemas clássicos da geometria grega; aliás Papo, no prefácio ao livro III da sua *Colecção Matemática*, insinua que estes problemas talvez sejam impossíveis de resolver com os instrumentos euclidianos.

A impossibilidade de resolução, com régua não graduada e compasso, destes dois problemas clássicos da geometria grega, só foi demonstrada no séc. XIX pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel. A demonstração da impossibilidade deve-se ao facto de que as únicas medidas que se podem obter nas construções com régua não graduada e compasso, são as que se podem obter através da adição, subtracção, multiplicação, divisão e extracção de raízes quadradas a partir de números naturais. Quer a trissecção do ângulo quer a duplicação do cubo envolvem medidas que não podem ser construídas, unicamente, com régua não graduada e compasso.

No que concerne às referências bibliográficas, procuramos ser o mais abrangentes possível sobre o que se tem publicado acerca do conteúdo deste texto, o qual esperamos que possa contribuir para um melhor conhecimento de assuntos que fascinaram matemáticos ao longo dos tempos, em especial na *Antiga Grécia*.