

1.3 A SOLUÇÃO ATRIBUÍDA A HÍPIAS

O nome de Hípias de Elis, geómetra do séc. V a.C., ficou marcado na história das matemáticas principalmente pela sua contribuição com uma solução para o problema da trisseção do ângulo.

Papo de Alexandria no livro IV da sua *Colecção Matemática* descreve uma das mais antigas curvas da matemática, talvez a primeira depois da recta e da circunferência. A descrição dada por Papo sobre a principal propriedade desta curva torna bastante admissível que esta tenha sido inventada durante as tentativas de trisseção do ângulo. Esta curva foi posteriormente usada por Dinóstrato para a quadratura do círculo e como tal é chamada umas vezes *trissectriz*, outras vezes *quadratriz*.

“(…) a quadratriz foi inventada, provavelmente por Hípias de Elis, com o objectivo de trissectar o ângulo e foi originalmente empregada neste propósito; posteriormente Dinóstrato usou a curva para a quadratura do círculo e é daí que deriva o seu nome.” ([All], p. 191).

Tendo em atenção que a curva aparece na história da matemática pela primeira vez como uma curva que permite trissectar o ângulo, isto é, uma curva trissectriz, e associada ao nome do matemático Hípias de Elis, vamos optar pelo nome de *trissectriz de Hípias*.

Papo descreve o processo de construção desta curva que, ao que parece, foi a primeira a ser definida por via cinemática, tendo-se imaginado, desde essa época, instrumentos mecânicos para a traçar. ([V], pp. 194-195).

Seguidamente apresentamos a imagem de um mecanismo para desenhar a trissectriz de Hípias, obtida no site do Museu Universitário de História Natural e da Instrumentação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emilia, Itália.

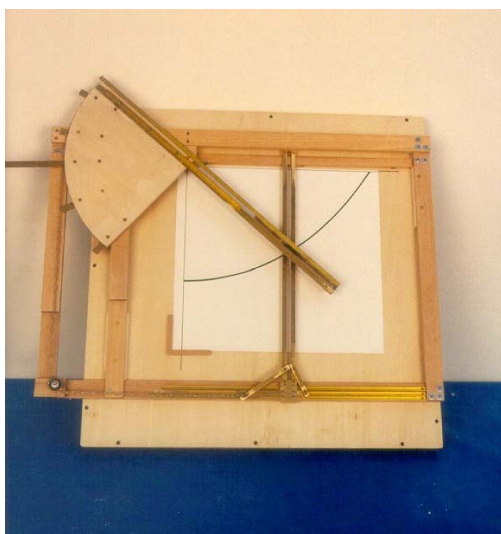


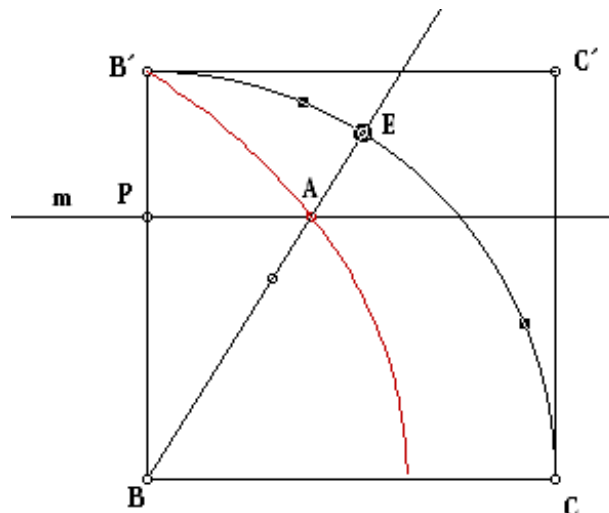
Imagem obtida em <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/155ogg.htm>

Papo começa por se referir à curva do seguinte modo (cf. [P]; em [Ver3], I, pp. 191-192):

“Uma linha que toma o nome da sua própria propriedade foi adoptada por Dinóstrato, Nicomedes e certos outros autores recentes para efectuar a quadratura do círculo; chamaram-lhe quadratriz e eis o modo como é gerada.”

Papo exprime, de uma maneira um pouco confusa, os movimentos que vão gerar a curva. O processo de construção da curva é cinemático, pois a curva é obtida pelos pontos que são a intersecção de dois segmentos de recta em movimento uniforme. Podemos descrever a sua construção do seguinte modo:

1. seja um quadrado $BB'C'C$, de acordo com a figura seguinte;
2. constrói-se uma linha m , paralela ao lado $B'C'$ e que gradualmente desce, a uma velocidade constante, desde a sua posição inicial – que é coincidente com o lado $B'C'$ – até coincidir com o lado BC ;
3. ao mesmo tempo, o lado BB' roda em torno do ponto B , com movimento circular uniforme, desde a posição inicial BB' até à posição final coincidente com o lado BC .



Ambos os movimentos acima descritos começam e terminam simultaneamente e têm velocidades constantes. Enquanto se deslocam, as duas rectas intersectam-se num determinado ponto, A , ponto esse que descreve a *trissectriz de Hippias*.

Do modo como foram considerados os movimentos anteriores podemos afirmar que a distância percorrida pelo lado $B'C'$ é proporcional ao tempo gasto no seu percurso. Do mesmo modo, a amplitude do arco determinado na circunferência de centro B e raio BB' é proporcional ao tempo percorrido no percurso circular deste raio. Assim, existe proporcionalidade entre a distância rectilínea percorrida pelo lado $B'C'$ e a amplitude angular percorrida pelo lado BB' . Ou seja, em todas as posições do ponto A , a condição

$$\frac{BB'}{BP} = \frac{\text{arc } B'C}{\text{arc } EC} \text{ é verificada.}$$

Ora, como afirma Carlos Sá ([ESQSC], p. 285):

“(...) é justamente devido a esta propriedade que a curva de Hípias permite reduzir todas as questões de proporcionalidade entre ângulos a questões análogas entre segmentos de recta e, em particular, permite reduzir a trissecção dum dado ângulo à trissecção dum segmento de recta.”

Como a trissecção de um segmento de recta, com régua não graduada e compasso, era conhecida dos géometras gregos, está assim justificada a importância da curva de Hípias para o problema da trissecção do ângulo. É de salientar que a curva aqui exposta permite dividir um ângulo num qualquer número de partes, desde que a razão em causa possa ser expressa em termos de segmentos de recta.

Com já referimos, esta curva é também utilizada na quadratura do círculo. No entanto, Esporo de Nicea (séc. III d.C.) criticou a utilização da quadratiz como um método prático para a quadratura do círculo, nomeadamente em duas vertentes: por um lado, afirma que a curva só se consegue construir quando sabemos sincronizar as velocidades, isto é, quando conhecemos a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro (se assim fosse tínhamos o problema da quadratura do círculo resolvido¹²); por outro lado, o ponto que procuramos para a quadratura do círculo, quando as duas rectas se intersectam no último momento, não existe (não se define). ([T4], pp. 10-11; [P] em [Ver3], I, pp. 193-197; [All], p. 184).

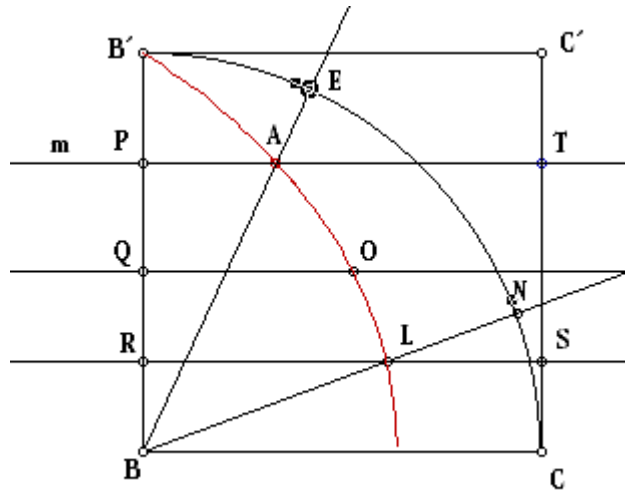
Enquanto que a segunda crítica apresentada por Esporo não se aplica ao nosso caso – a trissecção do ângulo – já quanto à primeira não podemos dizer o mesmo.

Vamos então agora trissectar um ângulo agudo ABC utilizando a trissectriz de Hípias. Comece-se por construir um quadrado $BB'C'C$, a partir do lado BC do ângulo ABC .

Construa-se a curva trissectriz de Hípias e designemos por A (sem perda de generalidade) o ponto de intersecção de um dos lados do ângulo ABC com a curva. Por A , trace-se uma paralela a $B'C'$ e designe-se por P o ponto de intersecção dessa paralela com o segmento BB' .

Trissecte-se o segmento BP (a trissecção de um segmento é possível com régua não graduada e compasso), sendo BR a sua terça parte. Por R trace-se uma outra paralela a $B'C'$ e designe-se por L o ponto de intersecção dessa paralela com a trissectriz de Hípias. Assim, o ângulo LBC é a terça parte ângulo ABC .

¹² Pois era conhecido o valor de π .



Provemos, agora, tal facto. Comecemos, de acordo com a figura anterior, por designar por E e N os pontos de intersecção do arco $B'C$ com as rectas BA e BL e por T e S os pontos de intersecção do lado CC' (do quadrado) com as rectas PA e RL , respectivamente.

Note-se que PT e BE se intersectam num ponto da trissectriz, A , e que RS e BN se intersectam num outro ponto da trissectriz, L .

Pelas propriedades da curva trissectriz de Hípias, é válida a seguinte relação

$$\frac{BP}{BR} = \frac{\text{arco } EC}{\text{arco } NC} = \frac{\angle ABC}{\angle LBC}, \text{ ou seja } \frac{BP}{BR} = \frac{\angle ABC}{\angle LBC}.$$

Mas, como o segmento de recta BR é a terça parte do segmento de recta BP , também o ângulo LBC é a terça parte do ângulo ABC . Mais ainda, tendo em atenção que se reduziu uma questão de proporcionalidade entre ângulos a uma questão de proporcionalidade entre segmentos de recta, a curva trissectriz de Hípias permite reduzir a multisseccção de um ângulo agudo à multisseccção de um segmento de recta.

Observe-se que, embora seja possível construir, com régua não graduada e compasso, alguns pontos da curva trissectriz de Hípias, não é possível desenhar a curva na sua totalidade, com o uso apenas dos instrumentos euclidianos. Continuamos, assim, sem uma solução para o problema de acordo com as regras de resolução inicialmente impostas.