

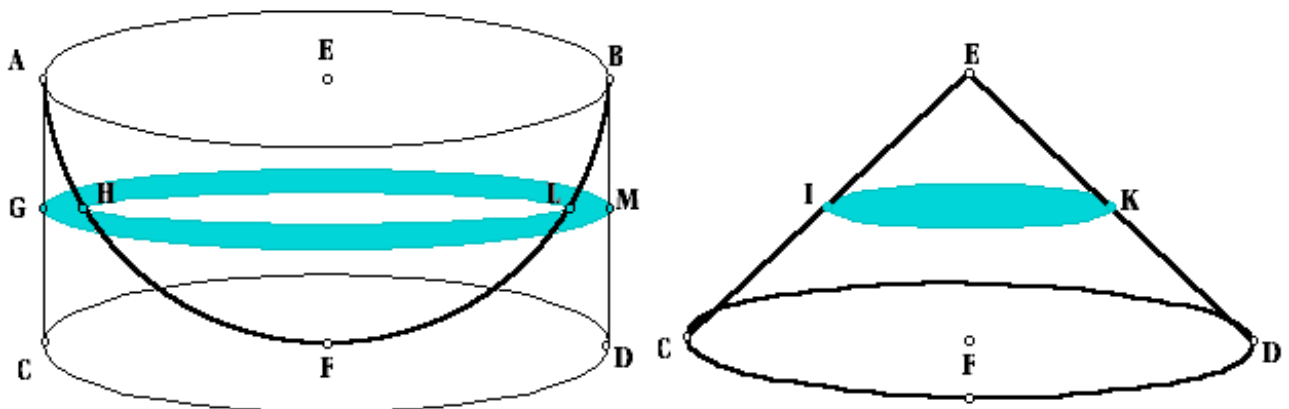
O Paradoxo da Escudela de Galileu

*“O infinito! Nunca outra ideia perturbou
tão profundamente o espírito do Homem!”*

David Hilbert

*“... mas recordemo-nos que estamos entre os infinitos e os indivisíveis, aqueles
incompreensíveis para o nosso intelecto finito pela sua magnitude, e estes pela sua
pequenez.”*

Pensamento de Galileu nas palavras de Salviati na obra *“Discursos e Demonstrações Matemáticas acerca de duas novas Ciências...”*, (1638).



Considere-se um cilindro e elimine-se a semi-esfera, de raio igual à altura do cilindro e cujo centro está na base superior do cilindro. Obtém-se assim uma espécie de taça ou malga que designaremos por **escudela**.

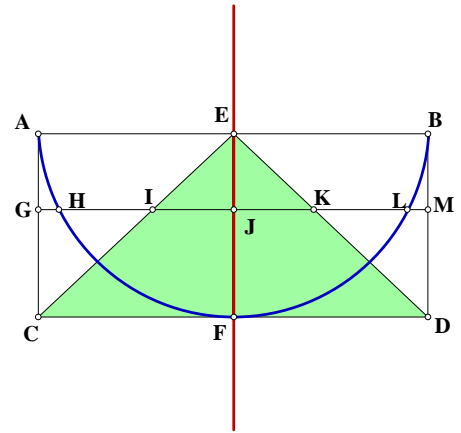
Considere-se também um **cone** recto cuja base é a base do cilindro e cuja altura é a do cilindro.

Seja α um qualquer plano que secciona a malga e o cone, à mesma distância da base superior do cilindro e do vértice do cone. As secções obtidas são, respectivamente, uma coroa circular e um círculo.

Tendo em atenção a figura seguinte, podemos considerar que os sólidos em causa são obtidos quando a figura gira em torno do eixo EF.

Dados da figura:

- E é o centro do semicírculo AFB de diâmetro AB;
- ACDB rectângulo circunscrito ao semicírculo;
- EF perpendicular a AB e a CD;
- GM paralelo a CD.

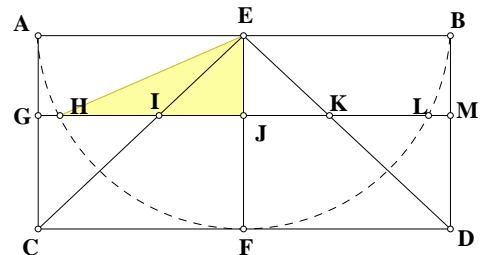


Problema I: Provar que a área da coroa circular e a área do círculo são iguais.

Consideremos um plano paralelo à base da escudela, por exemplo, o plano que contém a recta GM. Como já observamos, este plano secciona o cone num círculo e a escudela numa coroa circular.

Tendo em atenção os dados da figura, o triângulo HJE é rectângulo em J.

Pelo Teorema de Pitágoras (*Elementos* I, 47), podemos afirmar que:



$$\overline{EH}^2 = \overline{HJ}^2 + \overline{EJ}^2$$

Mas:

$$\overline{EH} = \overline{AE} \text{ (raio da esfera) e, por outro lado, } \overline{AE} = \overline{GJ}, \text{ donde } \overline{EH} = \overline{GJ}$$

e

$\overline{EJ} = \overline{IJ}$, pois o triângulo EIJ é isósceles (aplique-se *Elementos* VI, 2 ao triângulo CFE, que é isósceles, pois $\overline{EF} = \overline{CF}$).

Assim,

$$\overline{GJ}^2 = \overline{HJ}^2 + \overline{IJ}^2 \quad (1)$$

Como $\overline{GM} = 2\overline{GJ}$, $\overline{HL} = 2\overline{HJ}$ e $\overline{IK} = 2\overline{IJ}$, substituindo em (1) e dividindo os dois membros por 4, vem

$$\overline{GM}^2 = \overline{HL}^2 + \overline{IK}^2 \quad .$$

Recordemos a Proposição XII, 2 dos *Elementos* de Euclides:

“Os círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros”

Assim, a área do círculo de diâmetro GM (que vamos designar por A_{GM}) é igual à soma da área do círculo de diâmetro HL (que vamos designar por A_{HL}) com a área do círculo de diâmetro IK (que vamos designar por A_{IK}), isto é:

$$A_{GM} = A_{HL} + A_{IK}. \quad (2)$$

De (2) sai que $A_{IK} = A_{GM} - A_{HL}$, isto é,

$$\text{área do círculo (secção do cone)} = A_{GM} - A_{HL}. \quad (3)$$

Mas a área da coroa circular obtém-se retirando à área do círculo de diâmetro GM a área do círculo de diâmetro HL, isto é, a

$$\text{área da coroa circular} = A_{GM} - A_{HL}. \quad (4)$$

De (3) e (4), prova-se que a *área da coroa circular de largura \overline{GH} é igual à área do círculo de diâmetro \overline{IK}* .

□

Problema II: Provar a igualdade dos volumes de dois sólidos, a “navalha” e o “cone pequeno”.

Consideremos um plano paralelo à base da escudela, por exemplo, o plano que contém a recta GM, este plano “corta” o cone e a escudela. Acima deste plano obtemos, na escudela uma “navalha” e, no cone um outro cone mais pequeno, cujas bases são respectivamente uma coroa circular e um círculo.

1- Cálculo do Volume do “cone pequeno”

Designemos por h a altura dos sólidos em causa ($h = \overline{EJ}$) e por r o raio da esfera ($r = \overline{AE} = \overline{EH} = \overline{EF}$).

$$V_{\text{cone}} = 1/3 \times \text{Área do círculo de raio IJ} \times \text{altura}$$

Mas, $\overline{IJ} = \overline{EJ}$ (como já vimos, o triângulo IJE é isósceles), logo $\overline{IJ} = h$. Então,

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot (\pi h^2) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi h^3.$$

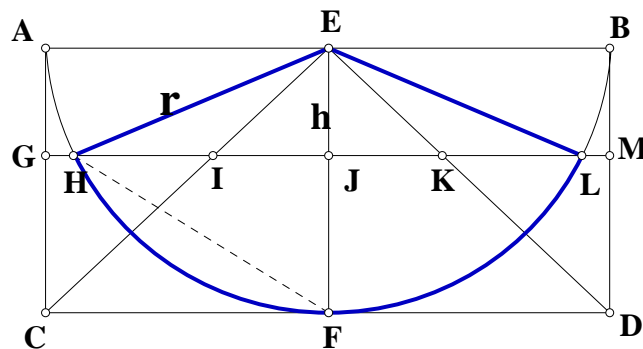
2- Cálculo do Volume da “navalha”.

Começemos por considerar a obra do matemático Arquimedes de Siracusa “*Acerca da Esfera e do Cilindro*”, nomeadamente, a

Proposição I,42: *A superfície de qualquer segmento duma esfera menor do que um hemisfério é igual a um círculo cujo raio é igual à linha recta traçada do vértice do segmento para a circunferência do círculo que é a base do segmento da esfera;*

Proposição I,44: *O volume de qualquer sector duma esfera é igual a um cone que tem base igual à superfície do segmento da esfera contido no sector e altura igual ao raio da esfera;*

Vamos usar estas proposições para calcular o volume do sector EHFL da esfera.



a) Área do segmento da esfera é $\pi \overline{HF}^2$ (usando I, 42).

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{HE}^2 = \overline{EJ}^2 + \overline{HJ}^2, \text{ ou seja } r^2 = h^2 + \overline{HJ}^2$$

e

$$\overline{HF}^2 = \overline{JF}^2 + \overline{HJ}^2,$$

donde se obtém,

$$\overline{HF}^2 = (r-h)^2 + (r^2 - h^2) \Leftrightarrow \overline{HF}^2 = 2(r^2 - rh).$$

Acabámos de concluir que a

$$\text{Área do segmento da esfera} = 2\pi(r^2 - rh).$$

b) Volume do sector EHFL da esfera (usando I,44) é igual a

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi(r^2 - rh) \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 2\pi(r^3 - r^2h).$$

c) Volume do cone de vértice E (altura h) e raio da base HJ é igual a

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \overline{HJ}^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi(r^2 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi(hr^2 - h^3).$$

∴ d) Volume da calota esférica que está abaixo de GM é igual a

$$\begin{aligned} & \text{Volume do sector EHFL da esfera} - \text{Volume do cone anterior} = \\ & = \frac{1}{3} \cdot 2\pi(r^3 - r^2h) - \frac{1}{3} \cdot \pi(hr^2 - h^3) = \\ & = \frac{1}{3}(2\pi r^3 + \pi h^3) - \pi r^2h. \end{aligned}$$

Finalmente:

Volume da “navalha” =

= Volume do cilindro de altura h - (Volume da semi-esfera - Volume da calota esférica).

$$\begin{aligned} \text{Volume da “navalha”} & = \pi r^2h - \left(\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 - \left[\frac{1}{3}(2\pi r^3 + \pi h^3) - \pi r^2h \right] \right) = \\ & = \pi r^2h - \left(\pi r^2h - \frac{1}{3}\pi h^3 \right) = \\ & = \frac{1}{3} \cdot \pi h^3. \end{aligned}$$

Provamos assim que o volume da “navalha” é igual ao volume do “cone pequeno”, isto é, os sólidos em causa têm o mesmo volume.

□

Segundo Galileu é possível, para qualquer plano horizontal (paralelo à base destes sólidos), obter duas secções com a mesma área que são bases de dois sólidos com o mesmo volume.

O que fundamentalmente preocupou Galileu foi o facto de ao “subir” tais planos até ao topo do cilindro, na escudela obtemos uma **circunferência** e no cone um **ponto**.

Então,

UM PONTO é igual a INFINITOS PONTOS

É este o **Paradoxo da escudela de Galileu**

Referências:

- **Heath, T.**, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2ªed., Dover Publications, New York, 1956.
- **Katz, V. J.**, *A History of Mathematics, na Introduction*, 2ªed., Addison Wesley, New York, 1998.
- **Euclides**, *Elementos de Euclides, tradução portuguesa*, Real Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1824.
- **Boyer, Carl B.**, *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher, L.da., São Paulo, 1974.
- <http://galileo.rice.edu> .
- <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Galileo.html> .
- <http://galileoandstein.physics.virginia.edu> .