

## Círculos

### Tarefa proposta pelo formador:

Numa folha de papel, desenhem dois círculos, A e B, de tamanhos diferentes, digamos, A maior do que B. Usando só régua e compasso, pede-se para desenhar

- um círculo de área igual à soma das áreas de A e B;
- um círculo de área igual à diferença das áreas de A e B;
- um círculo de área igual a metade da área de A.

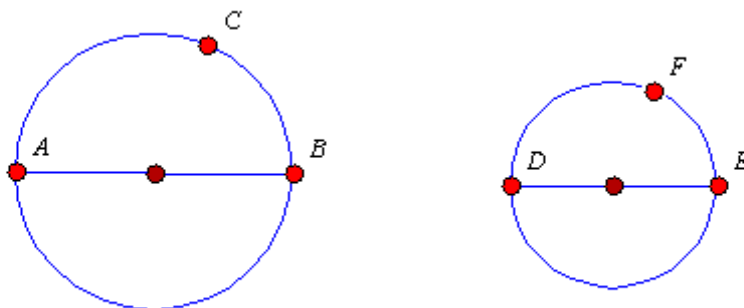
Pede-se também a justificação do procedimento, invocando apenas proposições dos *Elementos* de Euclides.

### Problema 1:

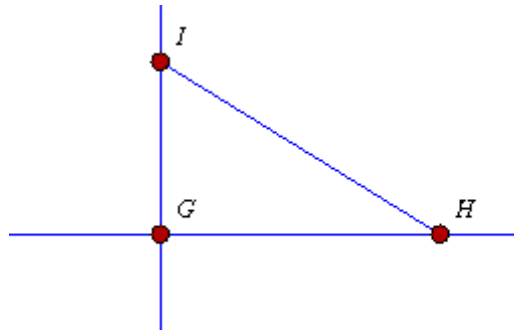
Dados dois círculos, de tamanhos diferentes (digamos A maior que B), construir um círculo cuja área seja igual à soma das áreas dos círculos dados.

### Construção:

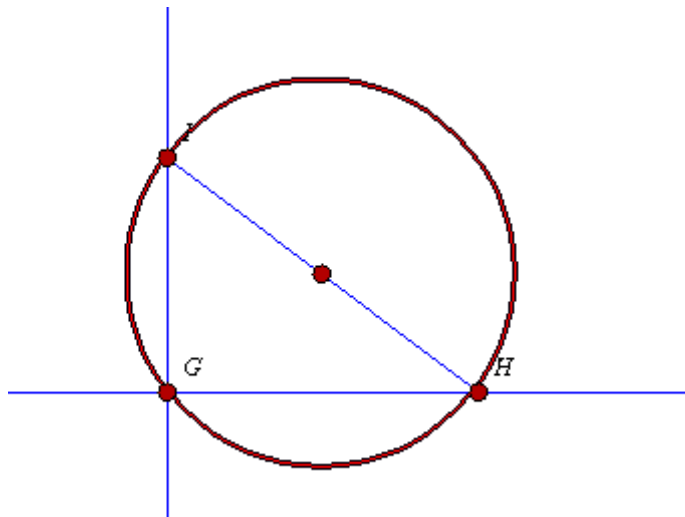
Consideremos os círculos ABC e DEF, cujos diâmetros vamos designar por AB e DE, respectivamente.



Sobre uma linha recta marquemos um ponto, que vamos designar por G. Com extremidade neste ponto e usando **Elementos I.2**, construíamos um segmento de recta GH igual a AB. Com base em **Elementos I.11** construíamos uma linha recta, perpendicular a GH e que passa por G. Sobre esta linha recta e com extremidade em G, construíamos, usando **Elementos I.2**, um segmento de recta igual a DE, que vamos designar por GI. Usando o **Postulado 1**, do livro I dos *Elementos* de Euclides, construíamos o segmento de recta IH. De acordo com a **Definição 21** do Livro I, estamos em presença de um triângulo rectângulo GHI, de hipotenusa IH e catetos  $AB = GH = AB$  e  $GI = DE$ , respectivamente, os diâmetros dos círculos iniciais.



Com base em **Elementos I, 10**, bissectemos o segmento IH. Com centro no ponto médio de IH, pelo **Postulado 3** do Livro I, construímos o círculo que passa por H – o círculo IHG, cujo diâmetro é a hipotenusa do triângulo rectângulo GHI. O círculo assim construído tem área igual à soma das áreas dos círculos ABC e DEF.



Prova:

Por **Elementos XII, 2**, podemos afirmar que

$$\frac{\text{Círculo } DEF}{\text{Círculo } ABC} = \frac{\text{Quadrado } DE}{\text{Quadrado } AB}.$$

Mas como, por construção,  $AB = GH$  e  $DE = GI$ , temos

$$\frac{\text{Círculo } DEF}{\text{Círculo } ABC} = \frac{\text{Quadrado } GI}{\text{Quadrado } GH}.$$

De acordo com **Elementos V, 18**

$$\frac{\text{Círculo } ABC + \text{Círculo } DEF}{\text{Círculo } ABC} = \frac{\text{Quadrado } GH + \text{Quadrado } GI}{\text{Quadrado } GH}.$$

Aplicando **Elementos I, 47** ao triângulo rectângulo GHI, temos

$$\text{Quadrado } GH + \text{Quadrado } GI = \text{Quadrado } IH .$$

Donde, se conclui que

$$\frac{\text{Círculo } ABC + \text{Círculo } DEF}{\text{Círculo } ABC} = \frac{\text{Quadrado } IH}{\text{Quadrado } GH} . \quad (1)$$

Por **Elementos XII, 2** podemos afirmar que

$$\frac{\text{Círculo } IHG}{\text{Círculo } ABC} = \frac{\text{Quadrado } IH}{\text{Quadrado } AB} .$$

Mas como  $AB = GH$ , vem

$$\frac{\text{Círculo } IHG}{\text{Círculo } ABC} = \frac{\text{Quadrado } IH}{\text{Quadrado } GH} . \quad (2)$$

De (1) e (2) resulta que

$$\frac{\text{Círculo } ABC + \text{Círculo } DEF}{\text{Círculo } ABC} = \frac{\text{Círculo } IHG}{\text{Círculo } ABC} .$$

Com base em **Elementos V, 9**, podemos concluir que

$$\text{Círculo } ABC + \text{Círculo } DEF = \text{Círculo } IHG$$

□

### **Problema 2:**

Dados dois círculos, de tamanhos diferentes, construir um círculo cuja área seja igual à diferença das áreas dos círculos dados.

### **Construção e Prova:**

Análogo ao problema 1, com as devidas adaptações ao facto do círculo pedido ter por diâmetro um dos catetos do triângulo rectângulo e não a hipotenusa, como no caso anterior.

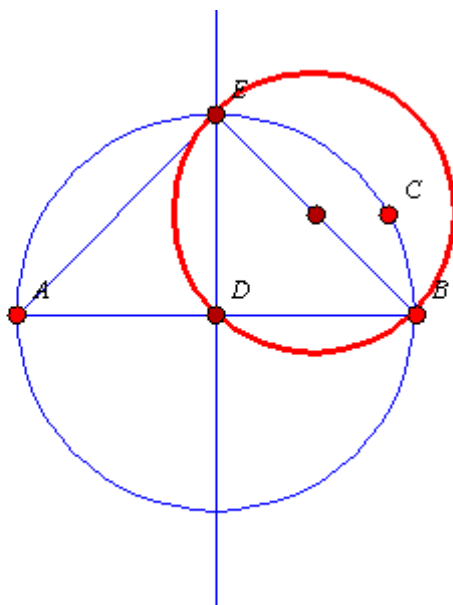
### **Problema 3:**

Dado um círculo construir um outro cuja área seja igual a metade da área do círculo dado.

#### **Construção:**

Consideremos o círculo ABC de diâmetro AB. Por **Elementos III, 1** encontramos o centro do círculo, que vamos designar por D. Com base em **Elementos I.11** construímos uma linha recta, perpendicular a AB e que passa por D. Esta linha vai intersectar a fronteira do círculo num ponto que vamos designar por E. Aplicando **Elementos I, 4** aos triângulos ADE e DBE, e **Elementos III, 31** ao semicírculo ABE e de acordo com a **Definição 20** e a **Definição 21** do Livro I, podemos afirmar que o triângulo ABE é rectângulo em E e isósceles, sendo AB a sua hipotenusa.

Escolhamos qualquer um dos catetos, por exemplo EB, e com base em **Elementos I, 10**, bissectemo-lo. Com centro no ponto médio de EB e pelo **Postulado 3** do Livro I, construímos o círculo que passa por B – o círculo EBD, cujo diâmetro é o cateto EB do triângulo rectângulo ABE. O círculo assim construído tem área igual a metade da área do círculo dado.



Prova:

Por **Elementos XII, 2**, podemos afirmar que

$$\frac{\text{Círculo } ABC}{\text{Círculo } EBD} = \frac{\text{Quadrado } AB}{\text{Quadrado } EB} .$$

Mas aplicando **Elementos I, 47** ao triângulo rectângulo ABE, temos

$$\text{Quadrado } AB = \text{Quadrado } AE + \text{Quadrado } EB .$$

Donde,

$$\frac{\text{Círculo } ABC}{\text{Círculo } EBD} = \frac{\text{Quadrado } AE + \text{Quadrado } EB}{\text{Quadrado } EB} .$$

Mas como, por construção, o triângulo ABE, é isósceles, temos

$$\text{Quadrado } AE = \text{Quadrado } EB .$$

Donde,

$$\frac{\text{Círculo } ABC}{\text{Círculo } EBD} = \frac{2 \text{ Quadrado } EB}{\text{Quadrado } EB} .$$

O que nos permite concluir que

$$\frac{\text{Círculo } ABC}{\text{Círculo } EBD} = 2 ,$$

ou seja, o círculo EBD tem metade da área do círculo ABC.

□

Referências:

- **Heath, T.** (1956) – *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover, New York.
- <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html> .