

Uma volta por manuais antigos: as ajudas didáticas da história

Arsélio Martins

Junho de 2003

Muitas vezes encontro utilidade na leitura dos textos dos manuais antigos só porque me lembram uma escrita necessária em linguagem corrente (de que me fui afastando e preciso de retomar). Há muito quem pense que não tem qualquer utilidade para as discussões sobre didática da análise estas incursões. Mas, para mim, uma boa parte das sugestões de ensino estão nas pequenas coisas que descubro ao ler uma definição escrita por mãos de outro tempo. Fico também a saber como as coisas foram mudando e ao tentar compreender algumas mudanças que parecem infinitesimais é que dou um ou outro passo em frente. Mesmo para a utilização da tecnologia, são os manuais antigos a maior fonte de sugestões.

1 Santos Andrea, [1914]

Aqui guardo algumas transcrições (traduções, quando é caso disso) de leituras recentes:

Em 1914, Santos Andrea ¹ escrevia :

134. Quando os valores sucessivos de uma variável se aproximam de uma quantidade constante e determinada, de modo a poderem diferir dela, em valor absoluto, tam pouco quanto quisermos, essa quantidade constante e determinada diz-se limite da variável.

135. Mais analiticamente:

Uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variável u , que passa sucessivamente por uma infinidade de valores,

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

quando, sendo dado um número positivo δ tam pequeno quanto quisermos, fôr possível achar um valor u_n de u , a partir do qual a desigualdade

$$|A - u_n| < \delta$$

seja verdadeira para qualquer valor de u .

É evidente que o valor de u , acima considerado, depende do valor atribuído a δ e que o número A pode ser racional ou irracional.

Muitas vezes representa-se que A é o limite da variável u , pela notação $\lim u = A$

136. Notemos que a diferença $|A - u_n|$ é também uma quantidade variável cujos valores se vão aproximando indefinidamente de zero; é, pois, um exemplo de uma variável cujo limite é zero.

A estas variáveis dá-se o nome de quantidades infinitamente pequenas.

Notemos ainda que pode acontecer, num caso particular, que os valores considerados $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sejam todos iguais, isto é, que a quantidade u seja constante. Como nesse caso é sempre, sendo A o valor dessa constante, $|A - u_n| = 0$ e portanto menor que qualquer quantidade positiva dada, convencionou-se dizer que o limite de uma quantidade constante é a própria constante.

137. Uma quantidade variável pode tender ou não para um limite. Apresentaremos alguns exemplos de variáveis que tendem para limites.

Exemplo I. Achar o limite para que tendem os valores da fracção $\frac{a}{n}$, quando a for constante e n aumentar indefinidamente.

(...)

Exemplo II. Achar o limite para que tendem os valores de uma fracção própria $\frac{a}{b}$ à medida que se adiciona a ambos os termos a mesma quantidade positiva.

(...)

Exemplo III. Achar o limite para que tendem os valores de uma fracção imprópria $\frac{a}{b}$ à medida que se adiciona a ambos os termos a mesma quantidade positiva.

(...)

¹Eduardo Ismael de Santos Andrea; *Complementos de lgebra* (apêndice aos elementos de álgebra da 3ª); 4ª e 5ª classes (ensino secundário oficial) 3ª edição conforme à ortografia oficial. Imprensa Nacional. Lisboa: 1914

2 Levy & Rouché, [1900]

Ainda a respeito de infinitamente pequenos, em 1900, Levy & Rouché² escreviam:

Chama-se infinitamente pequeno a toda a quantidade variável tendo por limite zero. A análise infinitesimal, criada cerca do fim do século XVII por Leibniz e Newton tem por objecto o uso dos infinitamente pequenos para a avaliação das quantidades finitas. Os infinitamente pequenos podem intervir de duas maneiras: a grandeza a avaliar pode, com efeito, apresentar-se seja como limite da razão de dois infinitamente pequenos, seja como limite de uma soma de infinitamente pequenos cujo número cresce indefinidamente. Daí, a divisão da análise infinitesimal em dois ramos: o cálculo diferencial e o cálculo integral.

Achei interessante esta citação que, em dois parágrafos para engenheiros, coloca em palavras simples de introdução a explicação para as designações dos ramos de estudo - análise infinitesimal, cálculo diferencial e cálculo integral.

E são os mesmos autores que dão uma definição de máximo (e mínimo) de uma função que me parece, na sua simplicidade, com uma grande potência integradora do ponto de vista didáctico. Também me pareceu importante transcrever o versículo sobre Método de Fermat para a descoberta de máximos e mínimos. Ora vejam:

207. Diz-se que uma função $\phi(x)$ admite um máximo para um valor a da variável x , quando se pode encontrar um número positivo ϵ tal que a diferença $\phi(a+h) - \phi(a)$ seja negativa para todos os valores de h compreendidos entre $-\epsilon$ e ϵ .

Quando, nas mesmas condições, aquela diferença é positiva, diz-se que a função admite um mínimo para $x = a$.

233. Não saberíamos fechar este capítulo sem dar a conhecer brevemente o primeiro método geral para descobrir máximos e mínimos. Este método, devido a Fermat, funda-se sobre a observação seguinte:

Quando uma função contínua $\phi(x)$ passa por um máximo ou um mínimo, toma um pouco antes e um pouco depois deste estado crítico, os mesmo valores com ou sem simetria. A consideração da curva representada pela equação $y = \phi(x)$, torna intuitivo este princípio do qual decorre a regra seguinte:

Para procurar em que circunstância uma grandeza variável se torna máximo ou mínimo, exprimir-se-á que esta grandeza, considerada em dois estados infinitamente vizinhos, tem o mesmo valor. A igualdade que daí resulta, tomada no limite em que os dois estados se confundem, dará a conhecer uma propriedade característica do máximo ou do mínimo.

Esta regra tem a sua importância própria, ao lado da teoria analítica que substitui com vantagem por vezes, sobretudo nas questões geométricas. Eis alguns exemplos:

1. Sendo dadas duas rectas Ox e Oy e dois pontos A e B sobre Ox , encontrar o ponto M de Oy tal que o ângulo $\angle AMB$ seja máximo.

²Rouché; Levy. Analyse Infinitesimale à l'usage des ingénieurs. Tome Premier - Clacul Différentiel. Gauthier-Villars. Paris:1900

2. para um ponto A , tomado no plano de uma ângulo yOx , conduzir uma secante ABC tal que o produto $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ seja mínimo.

3 Boucharlat, [1891]

Num manual de 1891, gostei de ler uma introdução ao conceito de variável. Aqui transcrevo o que Boucharlat³ escreveu:

1. Tomemos a equação

$$y = x^3 \tag{1}$$

e suponhamos que y passa a ser y_1 quando x passa a $x + h$; teremos

$$y_1 = (x + h)^3, \tag{2}$$

e, executando a operação indicada,

$$y_1 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3; \tag{3}$$

se nesa equação substituirmos x^3 por y , teremos

$$y_1 - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \tag{4}$$

e dividindo por h

$$\frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2. \tag{5}$$

Vejamos o que este resultado nos ensina:

$y_1 - y$ representa o acréscimo da função y correspondente ao acréscimo h dado a x já que esta diferença $y_1 - y$ corresponde ao novo estado da grandeza de y relativamente ao seu estado primitivo.

Por outro lado, sendo h o acréscimo de x , a expressão

$$\frac{y_1 - y}{h}$$

é a razão entre o crescimento da função y e o da variável x .

Considerando o segundo membro da equação (5), vê-se que esta razão diminui sempre que h diminui e que quando h se torna nulo, esta razão se reduz a $3x^2$. Este termo $3x^2$ é pois o limite da razão $\frac{y_1 - y}{h}$; é para este termo que ela tende quando fazemos diminuir h .

4. tem-se frequentemente necessidade em Análise de encontrar o limite da razão entre o acréscimo $y_1 - y$ que toma uma função com o acréscimo correspondente h da sua variável; damos-lhe o nome de derivada ou coeficiente diferencial. Assim, a derivada de uma função é o limite da razão entre o acréscimo que toma a função e o acréscimo correspondente da sua variável, quando este tende para zero. Representa-se a derivada de uma função y de x pela notação $\frac{dy}{dx} \dots$
A diferencial e uma função é o produto da derivada por uma quantidade arbitrária que designamos por dx .

³Boucharlat, J-L. *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral*; Gauthier-Villars. Paris:1891

4 Comte, [1843]

Nas viagens pelos livros mais ou menos antigos da escola, descobri várias coisas que não sabia. E descobri o matemático Auguste Comte⁴. No manual de Comte sobre Geometria Analítica⁵, há muitos assuntos de interesse. Interessaram-me sobretudo os programas dos cursos (por aulas e com a duração das aulas previstas para cada assunto) e a redacção por teorias. Para estas notas, escolhi parte da teoria das assíptotas:

Teoria das assíptotas

48. Este termo destina-se naturalmente a qualificar duas linhas quaisquer que continuamente tendem uma para a outra, de maneira a ficarem próximas tanto quanto se queira, sem contudo alguma vez se atingirem. Mas emprega-se quase sempre como substantivo, para designar sobretudo as rectas que apresentam relativamente a certas curvas uma tal relação. As assíptotas rectilíneas são, com efeito, as únicas cuja determinação pode contribuir muito para melhorar o conhecimento sobre essa curva. São apropriadas para dissipar toda a incerteza sobre o sentido da curvatura de uma curva na maior parte do seu curso, já que a curva deve necessariamente ser sempre convexa para o lado da assíptota, a partir do ponto em que a tendência se caracteriza, isto é, desde a última sinuosidade: uma curva que se aproximasse indefinidamente de uma recta voltando para ele a sua concavidade, não poderia evitar cortá-la. Para além deste motivo fundamental para restringir assim a descoberta de assíptotas, é preciso reconhecer que esta questão se for encarada em toda a sua amplitude, torna-se extremamente vaga para comportar alguma solução verdadeiramente geral. Porque duas linhas assíptotas de uma terceira podendo ser sempre assíptotas uma da outra, todas as as curvas susceptíveis de assíptotas rectilíneas podem por isso mesmo, ser dispostas de tal modo que cada uma delas seja assíptota das outras, fazendo de forma conveniente fazer coincidir as respectivas assíptotas. E não saberíamos pois como formular uma equação tão geral que representasse realmente todas as assíptotas curvilíneas de uma curva dada, já que ela é uma curva de todos os graus possíveis e assim sucederia também para curvas transcendentales de todas as espécies. Se acreditarmos que alguma venhamos a possuir os métodos analíticos adequados a um tal trabalho, será certamente por falta de termos compreendido suficientemente a extensão necessária deste assunto. A descoberta não pode tornar-se suficientemente precisa senão quando especificarmos que espécie de curvas ou que tipo de equações escolhermos para assíptotas. Ora, aceitando estas restrições, a determinação das assíptotas curvilíneas resulta naturalmente, pelo menos no que isso possa oferecer de verdadeiramente útil, da teoria das assíptotas rectilíneas, como se reconhecerá adiante. Sendo esta última teoria a única que deve ocupar-nos, é preciso agora explicar os métodos muito distintos, embora necessariamente equivalentes, que a sua instituição comporta, seja a partir da teoria das tangentes, seja de forma independente. Mas antes para evitar discussões supérfluas, convém

⁴M. Auguste Comte, ancien élève de l'École Polytechnique, répétiteur d'analyse transcendente et de mécanique rationnelle à cette école et examinateur des candidats que s'y destinent ; auteur du système de Philosophie positive

⁵Comte, M. Auguste. *Traité élémentaire de Géometrie Analytique à deux et trois dimensions contenant toutes les théories générales de géometrie accessibles à l'analyse ordinaire* Marilian-Coery et Dalmon, éditeurs. Paris:1843

começar pelas assíptotas paralelas aos eixos coordenados que podem ser obtidas sem dificuldade, como já foi verificado de forma espontânea com exemplos, em que se reconhece, por simples inspecção da equação, que uma das variáveis se torna infinita para um determinado valor da outra, sob a reserva evidente das explicações que terei oportunidade de fazer sobre o verdadeiro sentido geral de uma tal condição analítica.

49. (...)

Para mim constituiu leitura aliciante, porque muito sugestiva, o conjunto da teoria das assíptotas e dos seus métodos. Talvez venha a incluir uma tradução completa da teoria nestas notas para meu exclusivo prazer. O mesmo acontece com vários outros capítulos do manual de Comte, em que são analisados e criticados vários métodos clássicos que tanto relevam para a geometria analítica como para o que nos interessa – estudo das funções.

5 Borel, [1926]

Não resisto a apresentar um problema proposto por Borel⁶ que pode ser resolvido com recurso só às propriedades do trinómio e suas raízes (ou com raciocínios geométricos simples):

142. Problema V. Um triângulo e um quadrado têm as suas bases iguais assentes sobre uma mesma recta (D), estando para o mesmo lado de (D). Procure uma recta (D') paralela a (D) que seja tal que a soma das superfícies das partes do quadrado e do triângulo fora da banda entre (D) e (D') seja igual à superfície do triângulo.

⁶Borel, Émile; Montel, Paul . *Algèbre, programme de 1925*. Lib Armand Colin . Paris:1926