

# A lição de Ostrowski sobre a continuidade

24 de Março de 2003

Assim escreveu **Ostrowski**, nas suas *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, para funções de uma só variável:

Seja  $f(x)$  uma função definida , digamos no intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Para podermos encontrar uma definição aproveitável da **continuidade** da função  $f(x)$ , deixar-nos-emos guiar, provisoriamente, pela *ideia intuitiva* que os nossos sentidos relacionam com essa noção. Assim, dir-se-á: Uma função  $f(x)$  é contínua se for possível desenhar a sua curva representativa de um modo ininterrupto. Todavia, esta desta e uma definição a que não se consegue dar forma exacta. De facto, nela recorre-se a conceitos *mecânicos* e até mesmo *fisiológicos*. Aliás, bem vistas as coisas, ela não chega a ser interiramente correcta, visto que uma curva só pode ser desenhada quando a sua tangente for, como usa dizedr-se, seccionalmente contínua.

A formulação seguinte é de natureza mais *quantitativa*: A função  $f(x)$  é contínua se uma alteração *pequena* do argumento originar uma alteração *pequena* do valor da função. Naturalmente esta definição não é exacta. Pois, nesta formulação nem sequer chega a exprimir-se claramente que as alterações *pequenas* do argumetno e da função devem considerar-se convergentes para 0. Mas, se passarmos a pedir, duma forma mais determinada, que uma alteração do argumento convergente para 0 deve originar uma alteração do valor da função também convergente para 0, então não há dúvida que conseguimos acertar no essencial.

Em todo o caso, tal definição ainda apresenta o inconveniente de não facultar, directamente, uma análise clar da continuidade. De facto, esta definição refere-se ao *intervalo completo* de  $\alpha$  a  $\beta$ , de mod que ela não permite reconhecer imediatamente como tal continuidade definida num intervalo completo está relacionada com o *comportamento* da função na vizinhança de pontos isolados. Por isso, é melhor levar um pouco mais longe a análise da noção de continuidade e começar por definir a chamada **continuidade num ponto**.

**Definição 1** *Se  $x_0$  for um ponto interior ao intervalo  $(\alpha, \beta)$ , portanto tal que  $\alpha < x_0 < \beta$ , e se  $f(x)$  for uma função definida nesse intervalo, então  $f(x)$  diz-se contínua no ponto  $x_0$  quando ocorrer a relação*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Obtemos uma definição mais directa de continuidade, a qual contorna o conceito de limite, se pedirmos o seguinte<sup>1</sup>: *A cada  $\epsilon > 0$  corresponde um  $\delta(\epsilon)$  positivo, dependente de  $\epsilon$ , por forma tal*

<sup>1</sup>Esta definição remonta ao trabalho de Bernhard Bolzano intitulado *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes*,

que resulta

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{sempre que for} \quad |x - x_0| < \delta. \quad (2)$$

Do ponto de vista geométrico, isso significa o seguinte: Os valores de  $f(x)$  situam-se num intervalo arbitrário  $I$ , marcado em torno do ponto  $f(x_0)$ , logo que  $x$  pertencer a um intervalo conveniente, marcado em torno de  $x_0$  e dependente de  $I$ .

Portanto, para que a função  $f(x)$  resulte contínua no ponto  $x_0$ , havemos de pedir, *em primeiro lugar*, que exista o limite do primeiro membro de (1) e havemos de pedir *ainda* que esse limite seja precisamente igual ao valor de  $f(x)$  no ponto  $x_0$ . Por exemplo, a nossa função não é contínua ou, como usualmente se diz, é *descontínua* no ponto  $x_0$  se o limite referido existir tomando, porém, um valor diferente de  $f(x_0)$ . Para este facto, não importa que a culpa pertença, por assim dizer, à definição *desajeitada* de  $f(x)$  no ponto  $x_0$ . Naturalmente, neste caso podemos *pôr as coisas em ordem imediatamente*, se modificarmos a definição do valor de  $f(x)$  no ponto  $x_0$  escolhendo para novo valor precisamente  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Então, a nossa função resulta contínua no ponto  $x_0$  e a sua descontinuidade está levantada. Por isso, a uma tal descontinuidade chama-se **descontinuidade removível**<sup>2</sup>

Por outro lado, no que diz respeito à *existência* do limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , ela exige, conforme vimos anteriormente, que existam os limites *laterais direito e esquerdo* de  $f(x)$  e que ambos estes limites tenham o mesmo valor. Desde que um só desses dois limites laterais deixe de existir, passaremos a dizer que a função  $f(x)$  é *descontínua indeterminada* no ponto  $x_0$ . Em tal caso, a  $x_0$  chama-se ponto de descontinuidade da segunda espécie.

Posto isso, se existirem os dois limites laterais tendo, porém, valores diferentes, então a descontinuidade correspondente diz-se uma **descontinuidade de salto** ou uma descontinuidade da *primeira espécie*. Neste caso chama-se a  $x_0$  *ponto de salto*. Compare-se com a figura seguinte, onde a curva I representa uma função contínua em toda a parte, enquanto a curva II corresponde a uma função que tem uma descontinuidade de salto no ponto  $x = 0$  e a curva III representa uma função que *descontínua indeterminada* no ponto  $x = 0$ . Nos casos das curvas II e III, não chegaram a marcar-se as ordenadas correspondentes à abscissa  $x = 0$ , por não interessarem ao estudo. para a função representada pela curva III, o ponto  $x_0$  é um **ponto de infinito** ou **ponto impróprio**.

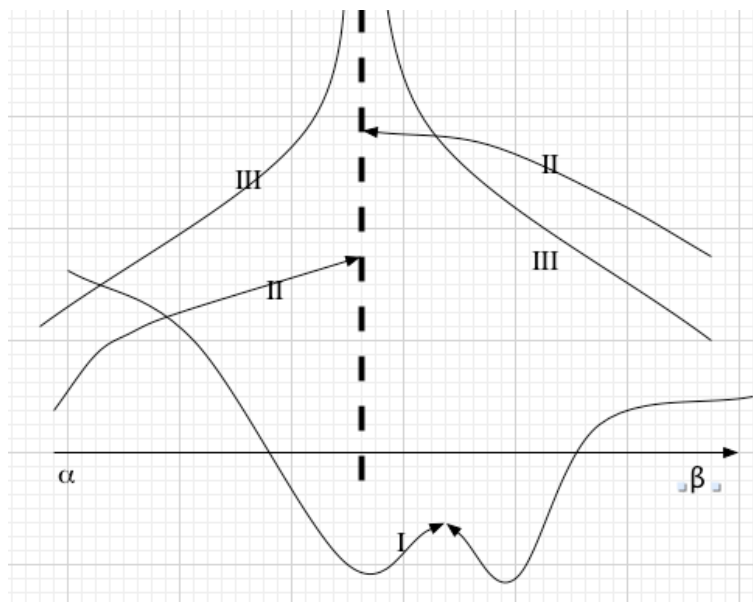
---

*dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegenetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reecele Wurzel de Gleichung liegt.* Praga (1817), Ostwalds Klassiker der exakten Wiessenschaften, n<sup>o</sup> 153.

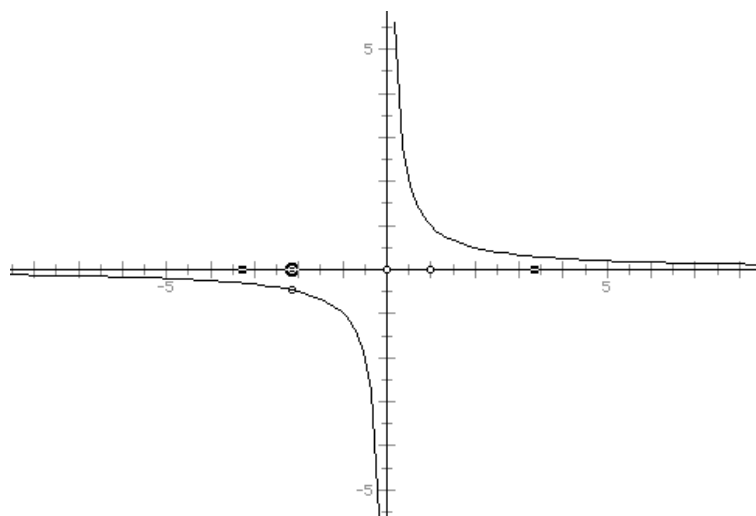
<sup>2</sup>Uma descontinuidade removível não é causada forçosamente por uma definição *defeituosa* da função no ponto  $x_0$ . Tal definição poderia ser imposta peremptoriamente, por exemplo, pelo problema prático que conduziu ao estudo da função  $f(x)$ . Ela só é despropositada por *motivos analíticos*, o que não tem que ver necessariamente com a sua utilidade prática. Assim, por exemplo, um aparelho de ressonância de sensibilidade ideal traçará uma recta horizontal, a qual será interrompida por um risco vertical no local da ressonância. Conforme se vê, neste caso a descontinuidade removível que aparece no local da ressonância não deve a sua existência, de modo nenhum, a qualquer deficiência, mas, pelo contrário, ela é o âmago da questão. As coisas passam-se dum modo praticamente análogo, no caso de um tudo de sintonagem do tipo que modernamente se usa na Física. Um exemplo puramente matemático de uma descontinuidade removível que aparece por forma natural e dado pela seguinte função, definida para

$$x > 0 : \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\nu + x^{-\nu}}$$

. Esta função anula-se para todos os  $x > 0$ , se excepturamos o ponto  $x = 1$  onde ela toma o valor  $1/2$ .



A hipérbole equilátera da da figura seguinte representa a função  $f(x) = 1/x$ . Aquin o ponto  $x = 0$  é um *ponto impróprio* no qual, como se diz, a função  $f(x)$  *salta de  $-\infty$  para  $\infty$* .



ora bem, se tivermos num ponto  $x_0$  a relação

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ou a relação

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

então a função  $f(x)$  diz-se contínua *do lado esquerdo* ou *do lado direito* no ponto  $x_0$ , conforme o caso. Esta noção de continuidade mais especializada desempenha um papel importante, principalmente nos casos em que a função  $f(x)$  está definida apenas à esquerda ou à direita de  $x_0$ . Por exemplo, se quisermos indagar das condições de continuidade no ponto  $\alpha$  para uma função definida no intervalo  $(\alpha, \beta)$ , então, pela própria natureza das circunstâncias, só pode haver aproximação do ponto  $x_0$  vinda do *interior* do intervalo, de modo que se trata da continuidade lateral direita. Da mesma forma, no ponto  $\beta$  só poderá falar-se da continuidade lateral esquerda. A fim de evitarmos a distinção entre os pontos inicial e terminal do intervalo, falaremos também, em ambos os casos, da continuidade *do lado (interior) do intervalo*.

Posto isso, *uma função diz-se contínua num intervalo se for contínua em cada um dos seus pontos, pedindo-se em qualquer um dos pontos extremos, caso pertença ao intervalo, apenas a continuidade do lado do intervalo*.

O exemplo mais simples de uma função contínua é uma *constante* (uma *função constante*), quer dizer, uma função que tem o mesmo valor fixo, suponhamos  $c$ , para todos os valores do argumento. Uma tal função representa-se graficamente por meio de uma recta, a qual correrá *paralela* ao eixo da variável independente.

Outro exemplo particularmente simples de uma função contínua para todos os  $x$  é o da função  $f(x) = x$ . De facto, neste caso, se quisermos que resulte  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$  para um  $\epsilon > 0$ , então é, obviamente, suficiente que se faça  $x_1 - x_2 < \epsilon$ .

A propósito da discussão do conceito de continuidade acima feita, o leitor deve ter notado que quase nos demorámos mais nos diversos casos de *descontinuidade* do que na continuidade propriamente dita. De vez em quando, fala-se a respeito de tais casos de descontinuidade, inspirando-nos na atitude da Medicina, como se fossem *casos patológicos*.

Todavia, esta comparação com a Medicina é bastante coxa, porque o médico estuda a Patologia não para familiarizar-se com o corpo são, mas principalmente para poder curar o corpo doente.

Na Matemática trata-se de uma coisa algo diferente, a saber de duas possibilidades de descrever um *conceito*. Em Lógica distingue-se entre o *conteúdo* e o *âmbito* de um conceito. O conteúdo de um conceito é a totalidade dos diversos casos por ele abrangidos. O âmbito de um conceito é fixado por uma definição, a qual permite distinguir nitidamente entre o que é abrangido e o que não é abrangido pelo conceito. Na Matemática começa-se-á, na maioria dos casos, por fixar o âmbito de um conceito e, em seguida, tentar-se-á descrever ou, ao menos, analisar e classificar o seu conteúdo. É assim que se procede, por exemplo no caso do conceito de função.

É particularmente característico para a forma de pensar matemática já se considerar essencial ao entendimento de conceitos, mesmo muito simples, que esses conceitos sejam delimitados de certo modo, estudando-se, para o efeito, casos não abrangidos por eles. Eis a razão porque, de vez em quando, se observa uma certa preferência por casos de excepção, pontos singulares, etc.! mas, tal preferência não é, de modo nenhum, motivada exclusivamente pelo momento psicológico. Quanto mais fundo penetrarmos na Matemática, tanto mais nos convenceremos de que considerar tais singularidades pode ser de uma importância mesmo decisiva. Por exemplo, na Geometria Analítica, quando se estuda uma curva algébrica, o número e a espécie dos seus pontos chamados singulares devem considerar-se como sendo as suas propriedades mais importantes. Assim, no estudo das curvas de segunda ordem, é fundamental a distinção entre secções cónicas *degeneradas* e *não-degeneradas* ■

---

Transcrição de "Definição de continuidade" in A. Ostrowski; *Lições de Cálculo Diferencial e Integral* voll, pp 117-122 (trad de Pedro Brauman). Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa:1967.