Sobre as diferentes definições de função
e a atitude do professor perante a situação

Arsélio Martins

Aveiro, Junho de 2003

A ideia

Jaime Carvalho e Silva levanta vários problemas para explicar as dificuldades do ensino da análise. Um deles consiste nas confusões que podem ser levantadas à compreensão dos alunos que se debatam com definições diferentes e mesmo não equivalentes para um determinado termo. Para além de dissimular uma tese sobre a necessidade de legislar definições únicas para um dado território e para um dado nível de ensino, Jaime Carvalho e Silva pretende discutir qual pode ser a melhor atitude dos professores perante a situação das diversas definições referidas a um mesmo termo. No seu texto, Jaime Carvalho e Silva reprova a leviandade dos professores quando indicam bibliografia complementar sem cuidarem de saber se há ou não há novas definições que possam prejudicar a compreensão dos conceitos, criar perplexidade e assombro. O discurso esconde a ideia comum de uma matemática edificada e formulada de um modo único e universalmente aceite.

Debruçamo-nos sobre estes problemas.

1 Se fossemos *definir* a melhor definição, seria...

Parece-nos que, no momento presente, se tivessemos de escolher um definição de função (que se aguentasse nos diversos níveis de ensino e no tempo) acabaríamos por optar por uma definição de tipo conjuntista.

Tomando a noção de conjunto como noção primitiva (com todas as clarificações que evitam os paradoxos), começaríamos por definir os pares não ordenados $\{x, y\}$ e os pares ordenados (x, y).

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

. Se $a \in A$ e $b \in B$, $(a, b) \subset \mathcal{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ ou $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}))$.

Chama-se produto cartesiano (ou exterior ou cruzado) do conjunto A pelo conjunto B, ao conjunto

$$A \times B = \{x : x = (a, b) \text{ tais que } a \in A \wedge b \in B\}$$

e uma relação. $\mathcal{R}$, entre elementos de A e B pode ser dada como uma parte de $A \times B$: $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Dizemos que a e b estão $\mathcal{R}$–relacionados e escrevemos $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $a \mathcal{R} b$.

Definição 1 *Sejam X e Y conjuntos e $\mathcal{R}$ uma relação tal que o domínio de $\mathcal{R}$ $\mathcal{D}(\mathcal{R}) = \mathcal{X}$ e para cada $x \in X$ existe um único $y \in Y$ e $(x, y) \in \mathcal{R}$. Diz-se que $\mathcal{R}$ é uma função de X para Y e escreve-se f em vez de $\mathcal{R}$.*
Note-se que a univocidade do elemento $y \in Y$ significa apenas que se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$. [1]

2 O que perdemos ou ganhamos com essa definição?

Nem mesmo na obra que trabalha com uma definição como aquela se foge às dificuldades. A certo passo, Manuel Lourenço escreve:

> Resta observar a propósito de funções que nesta antologia a nomenclatura não é constante

e também

> Entre os diversos sinónimos de função figuram expressões como operador, correspondência ou transformação

que, como sabemos, introduz ruídos já que alguns daqueles termos podem aparecer como consagrados para diferentes objectos matemáticos.

E, se continuássemos a construir as especificações das funções com objectos por esta via, estávamos a afastar-nos de toda a dinâmica do conceito e a diminuir muito os sentidos que lhe damos, embora garantíssemos um determinado tipo de trabalho matemático.

2.1 De onde vimos?

Podemos ter começado, com Dirichlet, por qualquer coisa como

Definição 2 *A qualquer x corresponda $\cdots$ um único y limitado, tal que quando x percorre com continuidade o intervalo de a a b, $y = f(x)$ de igual modo se altere gradualmente; diz-se então que y é uma função $\cdots$ contínua de x neste intervalo.* [2]

Esta definição é primordial e lembra-nos que é essencial para o conceito de função que se tire partido da variação da variável x, embora seja preciso sustentar que a variação contínua (à Dirichlet) não é a única possível.

A determinação essencial do conceito de função é o facto de que este deve apreender o movimento. Pensa-se mesmo que o conceito só pôde ser introduzido depois da matemática ter sido levada a considerar como seu objecto o estudo do movimento. Com a obra de Descartes, pôde

[1] Manuel Lourenço; Introdução portuguesa ao Teorema de Gödel *in* Gödel;Cohen, Rosser; Turing; Feferman; Dummett; *O Teorema de Gödel e a hipótese do contínuo.* Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa: 1979

[2] Lejeune-Dirichlet, G. 1837

finalmente tratar-se analiticamente o movimento com o cálculo diferencial e só assim se construíu completamente o conceito de função.

Todas as especificações (função contínua e função derivada) atestam pela sua terminologia a exigência insuperável da variabilidade ("quando x tende pa x_0, $f(x)$ tende para $f(x_0)$", "$f'(x)$ é o limite quando h tende para 0", etc)

2.2 Onde chegámos?

A modificação formal supondo que x e y pertencem a X e Y dados conduziu à definição de aplicação. E nesta, qualquer expressão que se refira à variabilidade como percorrer ou alterar, é eliminada. Quando muito aceita-se que estas expressões sejam "sugestões psicológicas".

Definição 3 *Uma relação f entre elementos de A e de B é uma relação funcional quando verifica o enunciado*

$$(xfy \wedge xfy') \Rightarrow (y = y')$$

Definição 4 *Uma correspondência $f = (F, A, B)$ é uma função se, para qualquer valor x pertencente ao conjunto de partida A de f, a relação $(x, y) \in F$ é funcional em y; o único objecto correspondente a x mediante f chama-se valor de f para o elemento de x de A e denota-se por $f(x) \cdots$* [3]

É claro que, segundo esta definição, não há qualquer razão particular pela qual se deva pensar x como variável.

Esta correspondência pretende ser mais geral e afinal é estática, podendo, no máximo, considerar-se como um caso particular, do mesmo modo como a consideração do movimento não pode excluir o repouso.

A teoria de conjuntos e a aritmetização da análise reformulam o conceito de limite e de derivada em termos de desigualdade numérica consistente com a estática da definição de função à Bourbaki. [4]

3 Da atitude dos professores face à situação ···

Os professores não podem nem devem esconder dos alunos que há definições diferentes e até mesmo não equivalentes correspondentes aos mesmos termos. Obviamente que defendemos que os professores devem conhecer a bibliografia que indicam e alertar para a existência de definições diferentes (ou pelo menos estar prontos para esclarecer as diferenças).

De facto, é na análise que acontece mais frequentemente (mas não é só na análise) terem sido os objectos e argumentos estabelecidos (e nunca de forma única) antes de uma formalização normativa. E acontece que a formalização pode não se adaptar aos conceitos que a linguagem ordinária

[3] N. Bourbaki, 1939

[4] As notas que constituem as subsecções podem ler-se em
Galuzzi, M. Funções *in Local Global.* Enciclopedia Einaudi, vol 4. INCM. Lisboa

pretendeu traduzir. A ideia de "função de" e as ideias de "limite", "continuidade", "máximo (mínimo)", "derivada", etc ganham sentido em contexto e contextos próprios. Ninguém pensa em continuidade ou limite sem caminho para andar (como se ao conceito primitivo ou ingénuo não interessasse a situação de preso, parado ou isolado). Procurar legislar sobre estas noções dando-lhes só o sentido de objectos ou argumentos matemáticos (por mais gerais que possam parecer) aplicáveis a todos os contextos mesmo quando eles contrariam as noções intuitivas e as explicações contextualizadas prejudicam, em meu entender seriamente, o ensino da matemática. Não só porque os enunciados aparecem estéreis e assépticos, mas principalmente porque perdem a fonte da língua ordinária (no que ela tem de extravagante e de rica em cambiantes e sentidos), perdendo a história da sua génese e deitando a perder a visibilidade das suas aplicações e utilidade.

Dito isto, preferível é manter a globalidade das representações para cada contexto e insistir numa outra ideia (cara aos formalistas) que defendi muitas vezes (mas para concluir erradamente pela necessidade das definições únicas):

> ··· um dos fins essenciais do ensino secundário de matemática é "ensinar os alunos a servir-se do formalismo da matemática", sendo que o "formalismo não é um conjunto de processos mecânicos em que o pensamento não intervém, e, ao contrário é a arte difícil da dedução lógica e da abstracção" [5]

Ao contrário do que pensei então, isto não pode significar definições únicas ou enunciados únicos. Só pode significar que os alunos podem e devem construir ou participar na construção da abstracção incluindo nisso as definições mais adequadas aos contextos sobre os quais trabalham. Deste modo, os alunos podem ganhar consciência de que outra pessoa (ou outro grupo de pessoas consensualmente) pode construir outro objecto ou argumento perante o mesmo contexto. [Dizemos "o mesmo contexto" sabendo que nunca é o mesmo, embora achemos que é o mesmo por pensarmos que o observador não faz parte do contexto.]

Daí não vem mal ao mundo desde que se esclareça a definição e se respeitem as regras de inferência lógica para os resultados subsequentes. Num teorema qualquer, uma definição pode ser ou é parte da hipótese (tornando-a mais forte ou mais fraca). O que o estudante deve ter presente é que regras de argumentação utiliza e saber se há ou não consequência de cada ingrediente que coloca na hipótese. Pensamos que esta ideia é libertadora, cria mais interactividade e prepara para o trabalho matemático qualquer que ele seja, não dependendo de qualquer definição mais ou menos religiosa.

3.1 ··· ao reconhecimento das dificuldades ···

Ficamos sempre com a amarga sensação de não sabermos se o que está estabelecido nos programas oficiais é claro, necessário e suficiente, para permitir este trabalho aberto dos professores. E ficamos sempre com a dificuldade de assumir que a nossa formação inicial e a nossa concepção da matemática nos tolhe muito os movimentos no sentido do que aqui enunciamos como desejo.

Reconhecem-se nas nossas impressões (o que presumimos sobre o que vemos) todas as dificuldades descritas por David Tall [6] e não pretendemos ou fingimos que haja uma solução fora do quadro geral

[5] escrito em notas pessoais de estudo antigas sob o título *intuicionismo e formalismo*

[6] no texto indicado por JCS
Cognitive Difficulties in Learning Analysis – http://www.bham.ac.uk/ctimath/talum/austin/analysis/tall/tall.htm

descrito, o que nos remete para a utilização, tão rigorosa quanto vulgar, do raciocínio no ensino e para o respeito que devemos garantir ao pensamento produzido por cada grupo de estudantes e à nossa capacidade de ajudar a raciocinar correctamente, com o uso das regras (essas sim, quase universalmente aceites e fáceis (?) de convencionar). Tall a esta preocupação se refere, mais ou menos nos seguintes termos:

> · · · o estudo de "como" pensamos em matemáticas avançadas pode não ser tão importante como "o quê" que pensamos, mas se os matemáticos não sustentarem esse "quê" em que pensamos investindo no "como" pensamos · · · então a matemática pode sair bem empobrecida · · ·

4 · · · e à utilidade de algumas propostas.

Penso que, se for necessário para além do exercitado com os conceitos e definições em curso pelos programas de ensino, se podem apresentar as tarefas (ou outras devidamente contextualizadas) propostas por Leigh Wood [7]. Exemplo útil, dentre as propostas de Wood, é a actividade de comparação de 2 definições de limite em linguagem natural e simbólica que me parece possível mesmo para alunos do ensino secundário.

Como exemplos de construção de definição (participação na construção pelos alunos) apontamos os casos de vectores livres e propomos que se conduzam os alunos do secundário até uma definição geral de distância. Há todos os ingredientes. Os estudantes conhecem (ou vão conhecendo) diversas distâncias e, para cada caso particular – distância entre dois pontos em $\mathbb{R}$ como o valor absoluto da diferença entre as suas abcissas; em $\mathbb{R}^2$ à custa da anterior e utilizando o Teorema de Pitágoras – , verificam que cada uma delas satisfaz certas propriedades. Ganhar-se-ia alguma coisa se os alunos construíssem uma definição geral de distância e pudessem depois pensar em outras distâncias não tão usuais (por exemplo com o produto interno)? Parece-me que não perderiam. Esta definição é fundamentalmente analítica e importante para a análise. Esta definição

Definição 5 *A aplicação*

$$d: \begin{array}{ccc} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

toma o nome de distância *em* $\mathcal{A}$ *quando satisfaz simultaneamente as seguintes propriedades:*

D_1) $\forall x, y \in \mathcal{A} \quad d(x,y) \geq 0 \wedge (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
D_2) $\forall x, y \in \mathcal{A} \quad d(x,y) = d(y,x)$
D_3) $\forall x, y, z \in \mathcal{A} \quad d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

permite um exercício interessante [8] sobre raciocínio matemático:

[7] em texto indicado por JCS:
Teaching Definitions in Undergraduate Mathematics – http://www.bham.ac.uk/ctimath/talum/newletter/wood.htm
[8] citado de "Mathématiques venues d'ailleurs", ed Belin, Paris:1982
num exame de *Complementos de Matemática* – Licenciatura em Ensino de Matemática da Universidade de Aveiro

Comente a seguinte demonstração.

Pretendemos provar que, a partir de D_1) e D_2) se prova D_3). Ou seja, para três pontos x, y e z quaisquer em $\mathcal{A}$ tem-se $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ desde que se verifique que $\forall x, y \in \mathcal{A} \quad d(x,y) \geq 0 \wedge (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$ e $\forall x, y \in \mathcal{A} \quad d(x,y) = d(y,x)$.

Suponhamos que essa desigualdade não se verifica, isto é, que se tem

$$d(x,z) > d(x,y) + d(y,z).$$

Como x, y e z são quaisquer, tomemos, por exemplo $x \neq y$ e $y = z$. Tem-se, pois, $d(y,z) = 0$ (por D_1)), ficando

$$d(x,z) > d(x,y)$$

o que é absurdo, já que como $y = z$, tem de ser

$$d(x,z) = d(x,y)$$

■

Este exercício possibilita a discussão sobre negação e quantificadores, mas também sobre a abundância na hipótese. Serve também para esclarecer a natureza de uma definição, em particular, falar da independência das propriedades definidoras.

O outro exemplo bom de construção de abstracção pelos alunos do ensino secundário está na noção de probabilidade que é dada de vários modos completamente diferentes mas pode ser unida pela axiomática (com mais potência, mas menos real(?)). Quantos professores estão em condições de explorar completamente todos os caminhos que são propostos nesse assunto? O que é frequente é haver trabalhos completamente separados, como se tratassem uma lista de casos a abordar ou tipos de exercícios que é preciso saber resolver; e o que é raro é haver síntese e apropriação do conceito.

Exemplos úteis podem ser ainda exercícios de demonstração de teoremas em que algum termo (definido de várias maneiras) esteja integrado como parte da hipótese e a escolha de uma das definições seja decisiva para a prova pretendida. ■

AM