Conceitos de função,
Caraça, Agudo ....

Arsélio Martins

1 A função segundo Bento de Jesus Caraça

Nas *Lições de Álgebra e Análise* (p. 55)[1], Bento de Jesus Caraça define função do seguinte modo:

> **Definição 1** *Sejam* u *e* z *duas variáveis, reais ou complexas, e sejam* (F) *e* (D)*, respectivamente os seus domínios.*
> *Se entre* u *e* z *existe uma correspondência tal que a cada valor de* z*, domínio* (D)*, corresponde um valor de* u*, domínio* (F)*, seja qual for a maneira como essa correspondência é estabelecida, diz-se que* u *é função de* z*, definida no domínio* (D) *e escreve-se*
>
> $$u = f(z)$$

Como uma Observação, pouco depois, Caraça escreve

> (...) 3. Na definição exige-se que a correspondência *argumento* $\longrightarrow$ *função* seja unívoca.

Têm interesse igualmente as considerações de Caraça sobre os diversos tipos de definição de função – analítica, geométrica e aritmética – que tem muito a ver com as preocupações actuais de proporcionar e exigir abordagens destes tipos, utilizando tecnologia gráfica.

[1] já identificada em nota anterior

Nos *Conceitos Fundamentais de Matemática*[2], depois de várias intervenções sobre a realidade e o papel da ciência, Bento de Jesus Caraça dá uma definição de função e volta a falar dos vários modos de definição – analítica, geométrica – e da tradução das leis analíticas em leis geométricas.

Definição 2 *Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se*

$$y = f(x)$$

se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \longrightarrow y$. A x chama-se variável independente e a y variável dependente.

[2]Caraça, B.J. *Conceitos Fundamentais dda Matemática* Lisboa:1978
A edição mais recente dos Conceitos pela Gradiva traz algumas notas que actualizam algumas vertentes do desenvolvimento da ciência e, particularmente pode ter interesse especial para os nossos temas de estudo, a nota de A. Franco de Oliveira sobre infinitésimos e infinitamente grandes.

2 A função segundo Fernando R. Dias Agudo

Na sua *Introduçãõ à álgebra linear e geometria analítica*[3], Dias Agudo escreve:

> **Definição 3** *(...) Voltemos a considerar uma relação entre os elementos de dois conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, mas suponha-se agora que a relação satisfaz as propriedades*
>
> *F1.* $\forall_{x\in\mathbb{A}}\ \exists_{y\in\mathbb{B}}\ \ (x\rho y)$
>
> *F2.* $\forall_{x\in\mathbb{A}}\ \ x\rho y\ \wedge\ x\rho z\ \Rightarrow\ y=z$
>
> *quer dizer, ρ tem por domínio todo o conjunto $\mathbb{A}$ e cada elemento deste conjunto está em relação com um e um só elemento de $\mathbb{B}$*
> *([F1 e F2]* $\Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{A}}\ \exists!_{y\in\mathbb{B}}\ \ (x\rho y)$*)*
> *uma tal relação recebe o nome de* **aplicação** *ou* **função** *de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{B}$*
>
> (...) Como sinónimos de função utilizam-se além de aplicação, os termos *transformação*, *correspondência*, *operador.*
>
> **Definição 4** *O subconjunto de $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$*
>
> $$\mathbb{G}=\{(x,y)\in\mathbb{A}\times\mathbb{B}:\quad xfy\}=\{(x,y)\in\mathbb{A}\times\mathbb{B}:\quad f(x)=y\},$$
>
> *recebe o nome de* **gráfico** *da função e*
>
> *$f=g$ sse têm o mesmo gráfico.*
>
> (...) Se f for uma aplicação biunívoca de "$\mathbb{A}$ em $\mathbb{B}$, pode definir-se ainda f^{-1}, mas tratar-se-á então de uma aplicação não de $\mathbb{B}$ em $\mathbb{A}$ mas de $f(\mathbb{A}\subset\mathbb{B}$ em $\mathbb{A}$ (...)
>
> (...) Na prática consideram-se algumas vezes como funções correspondências que não satisfazem (F2.) (...] Será preferível chamar função só às relações unívocas e dizer, por exemplo, que a função $x\longrightarrow x^2$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não é invertível; as suas restrições aos conjuntos $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$, por exemplo, é que admitem inversas, a primeira traduzida por $y\longrightarrow+\sqrt{x}$ e a segunda por $y\longrightarrow-\sqrt{x}$, ambas de domínio $\mathbb{R}_+$.

[3]Dias Agudo, F. R.; *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica I* Escolar Editora. Lisboa:1983 pp 14 e seguintes.