Sobre a trissecção do ângulo

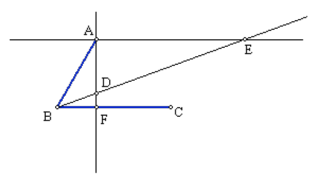
Arsélio Martins

Dezembro de 2002

A ideia

José Miguel de Sousa escreveu:
Texto 9. **A Trissecção do ngulo reduzida a outro problema**

Os geómetras gregos reduziram o problema da trissecção do ângulo a um outro tipo de problema: um problema de construções por *nêusis*. Pensa-se que este tipo de construções eram já conhecidas de Hipócrates no séc. V a.C.. Esta redução foi de extrema importância, visto que permitiu o aparecimento de novas técnicas geométricas. Algumas das construções apresentadas pelos geómetras gregos têm por objectivo resolver esta nêusis, como é o caso da solução de Nicomedes e de uma das soluções apresentadas por Papo.
Sejam, de acordo com a figura seguinte, BA e BC os lados que determinam o ângulo $\angle A\hat{B}C$ que pretendemos trissectar.



Pelo ponto A dum dos lados, tiram-se uma paralela e uma perpendicular ao outro lado. O segmento DE é inserido entre estas duas rectas de modo a que o seu comprimento seja duplo do comprimento do segmento AB e, ainda, de tal modo que o ponto B, vértice do ângulo a trissectar, esteja no seu prolongamento. Então, o ângulo $\angle D\hat{B}C$ é a terça parte do ângulo $\angle A\hat{B}C$.
Temos assim a nossa construção efectuada e **deixamos a cargo do leitor a prova de que o ângulo $\angle A\hat{B}C$ é trissectado pelo recta** BD. [1]

[1] É um excelente exercício que poderá ou não ser publicado na Zona de

Pelo exposto, o problema da trissecção dum ângulo agudo fica resolvido se soubermos inserir o segmento DE (duplo de BA) entre as rectas FA e AE e apontado para o ponto B. Assim, ao depararmo-nos com o problema da trissecção do ângulo, reduzimo-lo a um outro problema, que os geómetras gregos designaram por problema de construção por nêusis [2]- a inserção dum segmento de recta de comprimento pré-definido entre duas curvas, de modo a que um ponto fixo se encontre ou nesse segmento ou no seu prolongamento.
Então, como efectuar esta construção por nêusis? A primeira ideia que nos surge é utilizar uma régua graduada e ajustá-la do modo pretendido. Mas, obviamente, os desenvolvimentos dos matemáticos não se ficaram por esta resposta.
Descobriram-se várias curvas planas superiores que resolvem o problema de nêusis ao qual o problema da trissecção pode ser reduzido. Uma das mais antigas é a concóide inventada por Nicomedes (séc. III a.C.).
A redução do problema da trissecção do ângulo a um problema de inclinação, isto é, a um problema de *nêusis*, deve ter sido de extrema importância para os geómetras gregos. De facto, embora não seja possível encontrar uma solução com régua não graduada e compasso, é extremamente fácil de executar a construção com outros instrumentos mecânicos, como por exemplo uma régua graduada onde se marca a medida pretendida. Assim, estava encontrado um novo caminho de investigação, embora não o único, pois como veremos é possível encontrar soluções sem recorrer a construções por *nêusis*.
Em termos práticos pouco mais havia a fazer, tendo em atenção que era possível mecanicamente encontrar soluções para a trissecção do ângulo. Mas de um ponto de vista puramente matemático os gregos não estavam, em geral, satisfeitos com as soluções mecânicas.

1 A explicação do sonso

Este trabalho é publicado depois da publicação prometida do anexo ao texto 9, onde a demonstração está feita e, por isso, não pode ser outra coisa senão uma prova de incapacidade. Uma boa parte das questões que fui colocando ao longo das sessões tiveram sempre a ver com as dificuldades em trabalhar com a axiomática primordial e, em particular, com a definição dos instrumentos que os axiomas e as proposições de Euclides construíram idealmente.

Reconciliei-me com as minhas dificuldades nas muitas construções

Trabalhos. A prova em causa poderá, posteriormente, ser consultada no anexo ao texto 9.

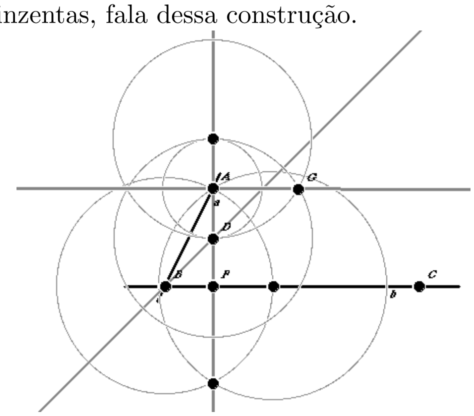
[2]Do verbo grego *neuein*, que significa apontar.

desta minha história (que, oh desgraça!, acabavam sempre por conter alguma ilegalidade face à constituição euclidiana) ao ler uma lição de Puig Adam [3]sobre o assunto. Talvez volte a ela, mais tarde.

De qualquer modo, decidi apresentar este texto, por ter sido muito instrutivo para mim. Saí de tentativas de demonstração mais ou menos falhadas nas figuras que as deviam apoiar e apareciam artificiosas, para me preocupar com as construções puras que afinal sugeriram a demonstração e as ligações com as matérias em estudo. Contra as minhas más consciência e formação, decidi não deixar passar esta oportunidade para me esclarecer e ajudar outros como eu.

2 Da construção para a demonstração

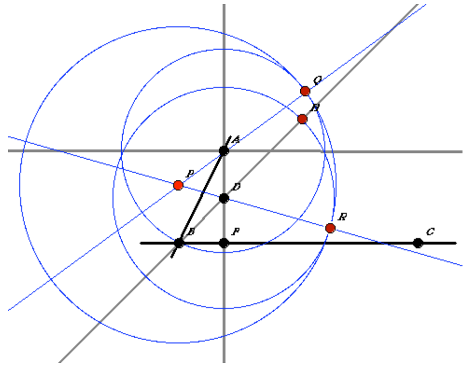
De acordo com o enunciado do problema apresentado, tomado o ângulo $\angle A\hat{B}C$, comecei por construir uma perpendicular a BC, passando por A. Esta construção pode realizar-se com régua não graduada e compasso. E sobre essa recta escolhi um ponto: D (livre sobre a recta perpendicular a BC). O enunciado do problema ainda exige a recta passando por A e paralela a BC ou perpendicular a AD (pode traçar-se legitimamente a paralela como perpendicular à perpendicular). A figura abaixo, em que as legítimas circunferências necessárias para as duas perpendiculares aparecem cinzentas, fala dessa construção.



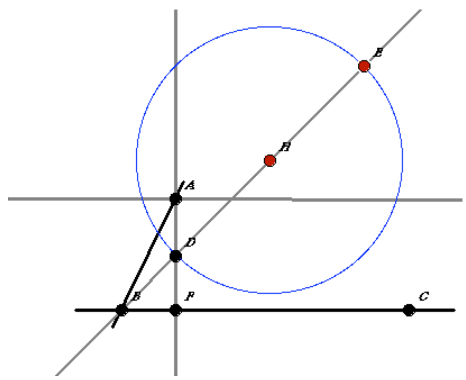
E, como já fiz antes, num dos primeiros trabalhos e de forma legítima face à constituição euclidiana, determinei sobre a recta

[3] Puig Adam. *Curso de Geometria Metrica* Tomo I - Fundamentos. Biblioteca Matemática 1949: Madrid

BD o segmento DH congruente com AB. É isso que a figura seguinte mostra.



Logo de seguida, seguindo as sugestões do problema, tomando a circunferência de centro em H e passando por D, obtive um ponto E da circunferência e da recta AD que satisfaz evidentemente a condição $\overline{DE} = 2.\overline{AB}$.
Aqui está:



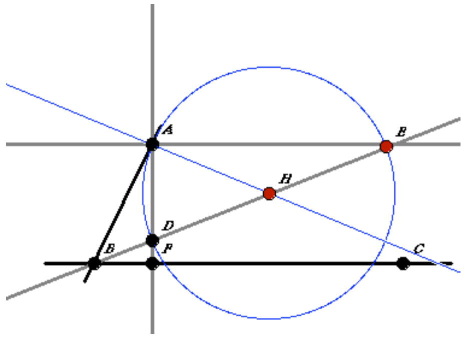
Deste modo, o ponto H apareceu durante a construção.

2.1 Primeira ajuda da tecnologia

<u>E é a partir de agora que a tecnologia mais ajuda.</u>

Deslocando o ponto D sobre a AF, posso obter a figura com E sobre a a paralela a BC. E, quando isso acontece a figura que se obtém diz tudo.
De facto, quando E está sobre a a paralela a BC, o triângulo ΔDAE é rectângulo em A (DE é diâmetro) e, como $\overline{DH} = \overline{AB}$, $\overline{AH} = \overline{DH} = \overline{AB} = \overline{HE}$. Os triângulos ΔAHE e ΔABH são

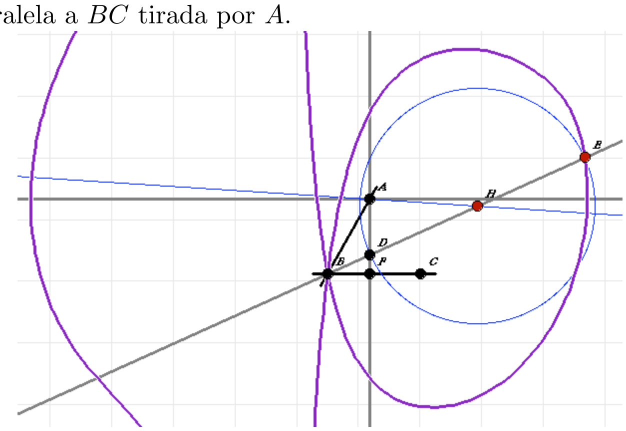
isósceles.



O ângulo $\angle A\hat{H}B$ ($= \angle A\hat{B}H$ no triângulo isósceles ΔABH) é externo do triângulo isósceles ΔAEH e, em consequência, $\angle A\hat{H}B = \angle A\hat{B}H = \angle A\hat{E}H + \angle A\hat{H}E = 2.\angle A\hat{H}E$
Por serem alternos internos nujm sistema de rectas paralelas cortadas pela secante BE, $\angle A\hat{E}H = \angle E\hat{B}C$. ▪

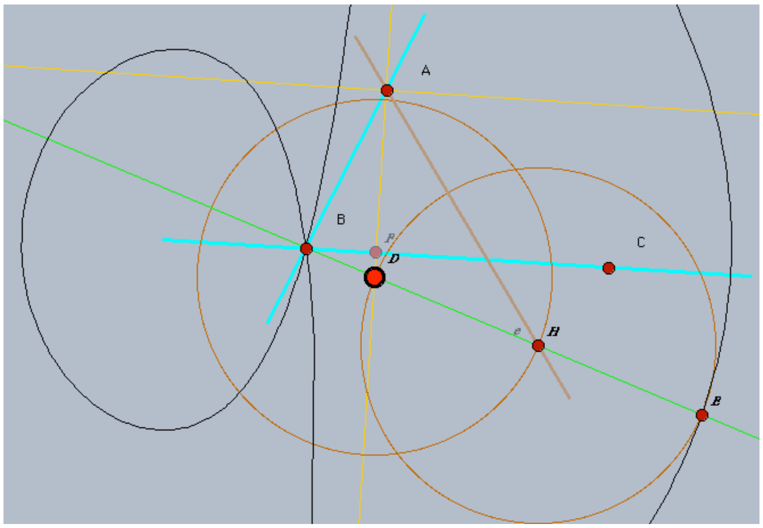
2.2 Segunda ajuda da tecnologia

O melhor de tudo, como é evidente agora para mim, é que podemos ver a concóide de Nicomedes em acção. De facto, quando D se desloca sobre a recta AF o ponto E descreve uma concóide que a tecnologia tão bem mostra. A recta BH trissecta o ângulo $\angle A\hat{B}C$ quando passa pelo ponto de intersecção da concóide com a paralela a BC tirada por A.



Pronto. Confessei-me. E confesso-me satisfeito por ter chegado aqui. Penso que alguma parte desta luta íntima pode ajudar. ■

É claro que fico sempre com dúvidas. O mais estranho disto tudo é dar-me lugares geométricos de forma diferente em momentos diferentes. Veja-se por exemplo:



Porquê? Só a mim?